Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Física IV-A – 2024/2 – PF- 02/12/2024
Exam, Form: A

Name: ______________________

Student Number: ______________________

TA: ______________________

Date: ______________________

Formulário

CONSTANTES NUMÉRICAS

$\mu_0 = 1\times10^{-6}$ H/m; $\varepsilon_0 = (1/9)\times10^{-10}$ F/m; $c = 3\times10^8$ m/s; $h = 6\times10^{-34}$ J · s; $h = 3\times10^{-15}$ eV· s; $\hbar = h/(2\pi)$; $hc = 900$ eV· nm; $e = 2\times10^{-19}$ C; 1 eV $= 2\times10^{-19}$ J; 1 J $= 5\times10^{18}$ eV; $m_pc^2 = 1000$ MeV; $m_ec^2 = 0{,}5$ MeV; 1μm $= 10^{-6}$ m; 1 nm $= 10^{-9}$ m; 1 Å $= 10^{-10}$ m; 1 pm $= 10^{-12}$ m; 1 GeV $= 10^3$ MeV $= 10^9$ eV; $\lambda_c = 1{,}8$ pm; $E_1 = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = -25$ eV; $a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = (9/\pi)\times10^{-11}$ m; $\mathrm{sen}(30^\circ) = 1/2$; $\mathrm{sen}(45^\circ) = \sqrt{2}/2$; $\mathrm{sen}(60^\circ) = \sqrt{3}/2$

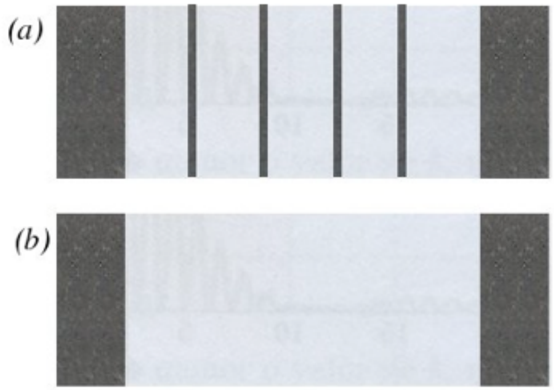
FORMULÁRIO GERAL

$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$; $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$; $\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)$; $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{B}/\mu_0$; $\mathbf{p} = \varepsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B}$; $u = \varepsilon_0E^2/2 + B^2/(2\mu_0)$; $\mathcal{P} = S/c$; $F = \mathcal{P}A$; $I = I_0\left[\frac{\mathrm{sen}\,(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2\left[\frac{\mathrm{sen}\,(N\phi/2)}{N\mathrm{sen}(\phi/2)}\right]^2$; $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}a\mathrm{sen}(\theta)$; $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}d\mathrm{sen}(\theta)$; $\mathrm{sen}(\theta_m^{(d)}) = m(\lambda/a)$; $\mathrm{sen}(\theta_m^{(d)}) = (m + n/N)(\lambda/d)$; $\mathrm{sen}(\theta_m^{(c)}) = m(\lambda/d)$; $R = mN = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$; $\theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{D}$; $\langle\mathrm{sen}^2\theta\rangle = 1/2$; $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$; $\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$; $E = K + m_0c^2 = \gamma m_0c^2$; $p = \gamma m_0u$; $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$; $x = \gamma(x' + ut')$; $t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$; $v_x = \frac{v_x'+u}{1+(v_x'u)/c^2}$; $v_y = \frac{v_y'}{\gamma(1+(v_x'u)/c^2)}$; $p_x = \gamma(p_x' + uE'/c^2)$, $E = \gamma(E' + up_x')$, $p_y = p_y'$; $\lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{h}{mc}\right)(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta)$; $f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$; $\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$; $\Delta E\cdot\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$; $L_n = n\hbar$; $r_n = n^2a_0$; $E_n = \frac{E_1}{n^2}$; $E_n = n^2h^2/(8mL^2)$; $eV_0 = hf - w$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x)$; $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$; $k_2 = \sqrt{2m|E-V|}/\hbar$; $R = (\sqrt{E} - \sqrt{E-V})^2/(\sqrt{E} + \sqrt{E-V})^2$; $T = 1 - R$; $\langle x\rangle = (2k_2)^{-1} = \hbar/\sqrt{8m(E-V)}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(E-V)})\mathrm{sen}^2(k_2L)]^{-1}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(V-E)})\mathrm{senh}^2(k_2L)]^{-1}$, $T \simeq \frac{16E(V-E)}{V^2}\exp[-\sqrt{8m(V-E)}L/\hbar]$.

Questões discursivas

1. [2,5 pontos]

A figura (a) mostra as franjas de interferência em um sistema de duas fendas de largura a, quando iluminadas por luz de comprimento de onda λ, enquanto que (b) mostra a figura de difração de uma única fenda, de mesma largura, para uma região próxima ao máximo central, quando iluminada pela mesma fonte.



(a) [0,8 ponto] Calcule a distância d entre as duas fendas da figura (a).

(b) [0,8 ponto] Encontre a separação espacial entre dois máximos de interferência adjacentes, próximos ao máximo central, em uma tela a uma distância R das fendas.

(c) [0,9 ponto] Calcule a intensidade do segundo máximo de interferência da figura (a), sabendo que a intensidade do máximo central é I_{max}.

2. [2,5 pontos]
O campo elétrico de uma onda eletromagnética plana e monocromática que se propaga no vácuo é descrito por

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \text{ sen}(kz - \omega t)\ \hat{x} + E_0 \text{ sen}(kz - \omega t + \phi)\ \hat{y}, \qquad (1)$$

onde k, ω e E_0 são constantes positivas. Em função dos dados do enunciado e de constantes fundamentais, calcule o que se pede, justificando os cálculos. **Atenção: NÃO substitua os valores das constantes fundamentais na resposta final de cada item.**

(a) [0,9 ponto] Determine o comprimento de onda, o período de oscilação, a direção e o sentido de propagação dessa onda.

(b) [0,8 ponto] Determine o vetor campo magnético (módulo, direção e sentido) dessa onda eletromagnética.

(c) [0,8 ponto] Determine a polarização da onda nos casos em que $\phi = 0$, $\phi = \pi/2$ e $\phi = \pi/4$.

3. [2,5 pontos]
(a) [1,0 ponto] Usando o modelo de Bohr, mostre que a velocidade v_n do elétron no nível n é dada por:

$$v_n = e^2/(2n\epsilon_0 h).$$

(b) [1,5 ponto] Calcule os períodos orbitais T_1 e T_2 para os níveis $n = 1$ e $n = 2$, respectivamente. Determine o valor da razão T_2/T_1.

4. [2,5 pontos]
Num determinado processo radioativo de decaimento beta, a partícula beta (elétron, massa de repouso igual a m_0) deixa o núcleo atômico com uma velocidade αc, com $\alpha > 0$ e c a velocidade da luz, relativa ao núcleo que está decaindo. Se o núcleo se move com uma velocidade de $3c/4$ no referencial do laboratório, encontre em termos de α e das constantes fundamentais:

(a) [0,8 ponto] A velocidade do elétron no referencial do laboratório quando ele é emitido na mesma direção de movimento do núcleo.

(b) [0,8 ponto] A velocidade do elétron no referencial do laboratório quando ele é emitido no sentido oposto ao do movimento do núcleo.

(c) [0,9 ponto] A energia cinética do elétron medida no referencial do núcleo que está decaindo, para as duas situações.

1.a) Pela figura, o 3º máximo de interferência coincide com o primeiro mínimo de difração.

$$d \operatorname{sen}\theta = 3\lambda$$

$$a \operatorname{sen}\theta = 1\lambda$$

$$\longrightarrow \quad \frac{d}{a} = 3 \Rightarrow d = 3a.$$

b) $\operatorname{tg}\theta_m = \frac{y_m}{R} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta_m \approx \operatorname{tg}\theta_m \Rightarrow \operatorname{sen}\theta_m = \frac{y_m}{R}$

$$y_m = R \operatorname{sen}\theta_m \Rightarrow y_m = m\lambda \frac{R}{d}$$

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m \rightarrow \Delta y = (m+1)\frac{\lambda R}{d} - m\frac{\lambda R}{d}$$

$$\Delta y = \frac{\lambda R}{d} \Rightarrow \boxed{\Delta y = \frac{\lambda R}{3a}}$$

c) $I = I_{max} \cos^2\frac{\phi}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2$

$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda}\operatorname{sen}\theta$ e $\beta = \frac{2\pi a}{\lambda}\operatorname{sen}\theta$

Para $m=2 \Rightarrow d\operatorname{sen}\theta = 2\lambda \Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2\lambda$

$\phi = 4\pi \rightarrow$ Então $\cos^2(\phi/2) = \cos^2 2\pi = 1$

$\Rightarrow I = I_{max}\left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2$

$\beta = \frac{2\pi a}{\lambda}\cdot\frac{2\lambda}{d} \Rightarrow \beta = 4\pi\frac{a}{d} \Rightarrow \beta = \frac{4\pi}{3}$

Assim $\frac{\beta}{2} = \frac{2\pi}{3}$

$I = I_{max}\left[\frac{\operatorname{sen}(2\pi/3)}{2\pi/3}\right]^2$

2. a) $K = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Como o argumento do seno é $\text{sen}(kz - \omega t)$, a onda se propaga no sentido de z positivo, $+\hat{z}$.

b) $\vec{B}$ é perpendicular à direção de propagação da onda e ao campo elétrico,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \rightarrow \vec{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{E_0}{c} \text{sen}(kz - \omega t)\,\hat{y} - \frac{E_0}{c} \text{sen}(kz - \omega t + \phi)\,\hat{x}$$

c) $\underline{\phi = 0}$

As componentes x e y estão em fase

$$\vec{E} = E_0 \operatorname{sen}(kz - \omega t)\,(\hat{x} + \hat{y})$$

→ Polarização linear

$\underline{\phi = \frac{\pi}{2}}$: $\quad \operatorname{sen}\left(kz - \omega t + \pi/2\right) = \cos(kz - \omega t)$

$$\vec{E} = E_0 \operatorname{sen}(kz - \omega t)\,\hat{x} + E_0 \cos(kz - \omega t)\,\hat{y}$$

⇒ polarização circular

$\underline{\phi = \pi/4}$:

$$\vec{E} = E_0 \operatorname{sen}(kz - \omega t)\,\hat{x} + E_0 \operatorname{sen}\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{4}\right)\hat{y},$$

→ polarização elíptica.

③ a) $L = m_e v_n r_n = n\hbar \rightarrow r_n = \dfrac{n\hbar}{m_e v_n}$

e $\dfrac{m_e v_n^2}{r_n} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} \Rightarrow m_e v_n^2 = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}$

Assim: $\cancel{m_e} v_n^{\cancel{2}} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{\cancel{m_e v_n}}{n\hbar}$

$$v_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n h}\,2\pi \Rightarrow \boxed{v_n = \frac{e^2}{2n\varepsilon_0 h}}$$

b) $T_n = \dfrac{2\pi r_n}{v_n} \Rightarrow T_n = \dfrac{2\pi}{v_n}\cdot\dfrac{n\hbar}{m_e v_n}$

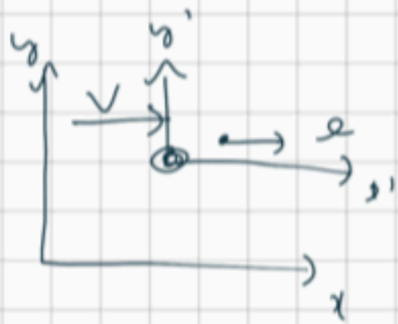
$$T_n = \frac{\cancel{2\pi}}{m_e v_n^2}\,\frac{nh}{\cancel{2\pi}} \Rightarrow T_n = \frac{hn}{m_e v_n^2}$$

$$T_n = \frac{hn\,4n^2\varepsilon_0^2 h^2}{m_e e^4} \Rightarrow \boxed{T_n = \frac{4h^3\varepsilon_0^2}{m_e e^4}\cdot n^3}$$

Assim: $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{\dfrac{4h^3\varepsilon_0^2}{m_e e^4}\cdot 2^3}{\dfrac{4h^3\varepsilon_0^2}{m_e e^4}\cdot 1} \Rightarrow \boxed{\dfrac{T_2}{T_1} = 8}$

T_1

Q4:



$v_x' = \alpha c$, no referencial do núcleo que decai.

$V = \frac{3}{4} c$

$v_x = ?$

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + v t') \\ t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2} x'\right) \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + v\,dt')}{\gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2} dx'\right)}$$

$$v_x = \frac{v_x' + v}{1 + \frac{v}{c^2} v_x'}$$

a) $v_x' = \alpha c$

$$v_x = \frac{\alpha c + \frac{3}{4} c}{1 + \alpha c \cdot \frac{3}{4} \frac{c}{c^2}}$$

$$v_x = \frac{\frac{(4\alpha + 3)}{4} c}{\frac{4 + 3\alpha}{4}}$$

$$v_x = \frac{(4\alpha + 3)}{4 + 3\alpha} c$$

b) $v_x' = -\alpha c$

$$v_x = \frac{-\alpha c + \frac{3}{4} c}{1 - \alpha c \cdot \frac{3}{4} c \frac{1}{c^2}}$$

$$v_x = -\frac{(4\alpha - 3)}{(4 - 3\alpha)} c$$

c) $E = \gamma m_0 c^2 = K + m_0 c^2$

$K = (\gamma - 1) m_0 c^2$

Para as duas situações

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2 c^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$K_a = K_b = \left[\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} - 1\right] m_0 c^2$$