Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Física IV-A – 2024/2 – Prova de Segunda Chamada- 11/12/2024
Exam, Form: $\boxed{\text{A}}$

Name: ____________________

Student Number: ____________________

TA: ____________________

Date: ____________________

Formulário

CONSTANTES NUMÉRICAS

$\mu_0 = 1\times10^{-6}$ H/m; $\varepsilon_0 = (1/9)\times10^{-10}$ F/m; $c = 3\times10^8$ m/s; $h = 6\times10^{-34}$ J · s; $h = 3\times10^{-15}$ eV· s; $\hbar = h/(2\pi)$; $hc = 900$ eV· nm; $e = 2\times10^{-19}$ C; 1 eV $= 2\times10^{-19}$ J; 1 J $= 5\times10^{18}$ eV; $m_pc^2 = 1000$ MeV; $m_ec^2 = 0{,}5$ MeV; 1μm $= 10^{-6}$ m; 1 nm $= 10^{-9}$ m; 1 Å $= 10^{-10}$ m; 1 pm $= 10^{-12}$ m; 1 GeV $= 10^3$ MeV $= 10^9$ eV; $\lambda_c = 1{,}8$ pm; $E_1 = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = -25$ eV; $a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = (9/\pi)\times10^{-11}$ m; $\mathrm{sen}(30^\circ) = 1/2$; $\mathrm{sen}(45^\circ) = \sqrt{2}/2$; $\mathrm{sen}(60^\circ) = \sqrt{3}/2$; $\cos(5^\circ) = 0,997$; $\mathrm{sen}(5^\circ) = 0,087$

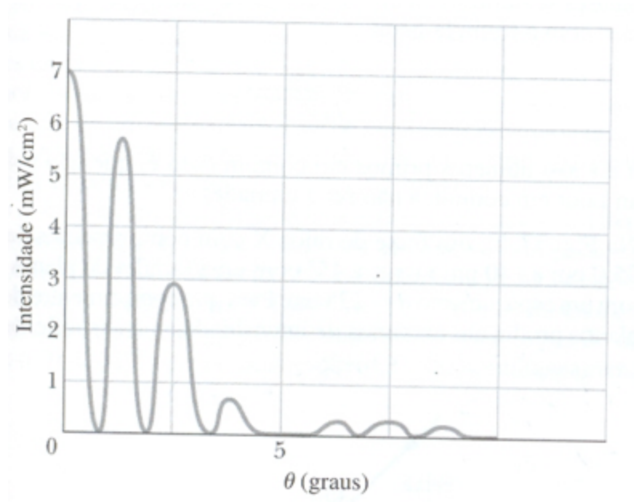
FORMULÁRIO GERAL

$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$; $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$; $\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)$; $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{B}/\mu_0$; $\mathbf{p} = \varepsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B}$; $u = \varepsilon_0E^2/2 + B^2/(2\mu_0)$; $\mathcal{P} = S/c$; $F = \mathcal{P}A$; $I = I_0\left[\frac{\mathrm{sen}\,(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2\left[\frac{\mathrm{sen}\,(N\phi/2)}{N\mathrm{sen}(\phi/2)}\right]^2$; $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}a\mathrm{sen}(\theta)$; $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}d\mathrm{sen}(\theta)$; $\mathrm{sen}(\theta_m^{(d)}) = m(\lambda/a)$; $\mathrm{sen}(\theta_m^{(d)}) = (m + n/N)(\lambda/d)$; $\mathrm{sen}(\theta_m^{(c)}) = m(\lambda/d)$; $R = mN = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$; $\theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{D}$; $\langle\mathrm{sen}^2\theta\rangle = 1/2$; $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$; $\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$; $E = K + m_0c^2 = \gamma m_0c^2$; $p = \gamma m_0u$; $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$; $x = \gamma(x' + ut')$; $t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$; $v_x = \frac{v_x'+u}{1+(v_x'u)/c^2}$; $v_y = \frac{v_y'}{\gamma(1+(v_x'u)/c^2)}$; $p_x = \gamma(p_x' + uE'/c^2)$, $E = \gamma(E' + up_x')$, $p_y = p_y'$; $\lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{h}{mc}\right)(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta)$; $f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$; $\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$; $\Delta E\cdot\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$; $L_n = n\hbar$; $r_n = n^2a_0$; $v_n = e^2/(2n\epsilon_0h)$; $E_n = \frac{E_1}{n^2}$; $E_n = n^2h^2/(8mL^2)$; $eV_0 = hf - w$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x)$; $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$; $k_2 = \sqrt{2m|E-V|}/\hbar$; $R = (\sqrt{E} - \sqrt{E-V})^2/(\sqrt{E} + \sqrt{E-V})^2$; $T = 1 - R$; $\langle x\rangle = (2k_2)^{-1} = \hbar/\sqrt{8m(E-V)}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(E-V)})\mathrm{sen}^2(k_2L)]^{-1}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(V-E)})\mathrm{senh}^2(k_2L)]^{-1}$, $T \simeq \frac{16E(V-E)}{V^2}\exp[-\sqrt{8m(V-E)}L/\hbar]$.

Questões discursivas

1. [2,5 pontos]

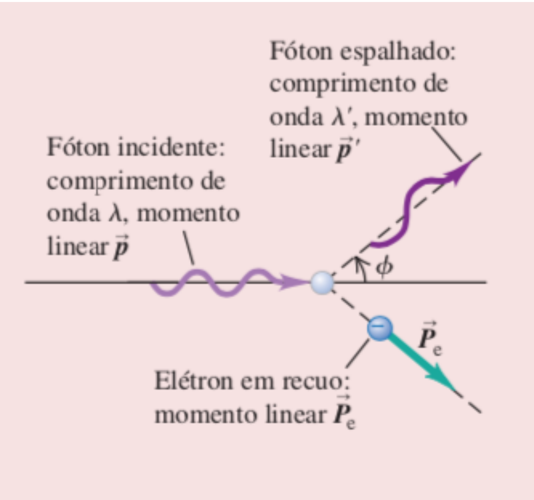
Um feixe de luz passa por duas fendas, cujas larguras são 5 μm , produzindo uma figura de difração cujo gráfico de intensidade I em função da posição angular θ aparece na figura abaixo.



(a) [1,0 ponto] Calcule o comprimento de onda do feixe de luz.
(b) [1,0 ponto] Calcule a distância entre as fendas.
(c) [0,5 ponto] Calcule explicitamente a intensidade correspondente ao primeiro máximo de interferência (m =1).

2. [2,5 pontos]

No espalhamento Compton, um fóton transfere parte de sua energia e momento linear a um elétron com o qual colide. Para elétrons livres (massa m), os comprimentos de onda de fótons incidentes (λ) e espalhados (λ') são relacionados ao ângulo de espalhamento ϕ.



Considerando que o fóton incidente possui energia E, o fóton espalhado possui energia E' e que o elétron está inicialmente em repouso, determine:

(a) [1,0 ponto] Usando a conservação do momento linear, escreva o módulo do momento do elétron após a colisão ao quadrado (P_e^2), em termos de E, E', ϕ e da velocidade da luz c.
(b) [1,0 ponto] Escreva a equação de conservação da energia em termos dos dados do problema.
(c) [0,5 ponto] Mostre que $\lambda' - \lambda = \left(\frac{h}{mc}\right)(1 - \cos\phi)$.

3. [2,5 pontos]
Considere uma partícula de massa m movendo-se em um potencial harmônico, cuja constante de mola é dada por k. A energia total da partícula é escrita como:

$$E = \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2\right),$$

sendo x a posição e p o momento linear da partícula. Assuma que p e x são relacionados pelo princípio de incerteza de Heisenberg, tal que $px = \hbar/2$.

(a) [1,0 ponto] Faça um esboço da energia $E(x)$ da partícula como função de x e mostre que a energia tem um mínimo.

(b) [0,8 ponto] Determine o valor x_m da posição de menor energia.

(c) [0,7 ponto] Determine o menor valor possível de energia E_m. Escreva E_m em termos de $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, a frequência angular natural do oscilador clássico. E_m é denominada energia de ponto zero do oscilador harmônico quântico.

4. Uma onda eletromagnética ilumina um aquário que está preenchido com água. Considere, a seguir, os aspectos da propagação da luz com a terminologia dos problemas de reflexão e refração da luz.

Um feixe parte do vidro que forma o aquário, de índice de refração ($n_v = 3$, e incide na interface plana vidro-água com o ângulo de incidência de $\theta_i = 60°$. Considere o índice de refração da água dado por $n_a = \frac{4}{3}$.

Calcule o que se pede e substitua os símbolos das constantes universais pelos seus valores numéricos respectivos, quando necessário. (Justifique todas as respostas!)

(a) [0,8 ponto] Determine o ângulo de reflexão e o ângulo de refração dos feixes refletido e refratado na interface vidro-água, se existirem.

(b) [0,8 ponto] Determine o ângulo de Brewster para um feixe incidente que parte do vidro em direção ao meio da água.

(c) [0,9 ponto] Se um feixe de luz monocromático possui comprimento de onda de 600 nm no ar ($n_{\text{ar}} = 1$), determine os comprimentos de onda desse feixe quando o mesmo está (i) no interior do vidro λ_v; (ii) no interior da água λ_a.

1) a) Mínimos de difração : $a \,\text{sen}\,\theta = m\lambda$

$m = 1$ para $\theta = 5°$.

$\longrightarrow \quad a \,\text{sen}\,\theta = \lambda \quad \rightarrow \quad \lambda = 5 \times 10^{-6} \times \text{sen}(5°)$

$\lambda = 436 \text{ nm}$

b) $\left.\begin{array}{l} d \,\text{sen}\, 5° = 4\lambda \\ a \,\text{sen}\, 5° = 1 \cdot \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{d}{a} = 4 \rightarrow d = 4a$

$d = 20 \mu m$ //

c) $I = I_0 \cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\left[\dfrac{\text{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2$

$d \,\text{sen}\,\theta = \lambda$

$\alpha = \dfrac{2\pi}{\lambda} d \,\text{sen}\,\theta \rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi}{\lambda} \cdot \lambda \rightarrow \alpha = 2\pi \rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = \pi$

$\Longrightarrow \cos^2(\alpha/2) = \cos^2 \pi = 1.$

$I = I_0 \left[\dfrac{\text{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2$

$\beta = \dfrac{2\pi}{\lambda} a \,\text{sen}\,\theta \rightarrow \beta = \dfrac{2\pi a}{\lambda} \dfrac{\lambda}{d} \Rightarrow \beta = \dfrac{2\pi}{4} \rightarrow \beta = \pi/2$

$\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\pi}{4} \rightarrow I = I_0 \left[\dfrac{\text{sen}(\pi/4)}{\pi/4}\right]^2$

Com $I_0 = 7\ mW/cm^2$

$\Rightarrow I = 0,81\, I_0 \rightarrow I = 5,6\ W/cm^2$

2) a) $\vec{p}_e = \vec{p}_1 - \vec{p}_3 \rightarrow p_e^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 p_3 \cos\theta$

Como $p_1 = \frac{E}{c}$ e $p_3 = \frac{E'}{c}$:

$$\boxed{p_e^2 = \frac{E^2}{c^2} + \frac{E'^2}{c^2} - \frac{2EE'}{c^2}\cos\phi}$$

b) $E + mc^2 = E' + \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2c^4}$

Com p_e obtido no item (a):

$$E + mc^2 = E' + \sqrt{E^2 + E'^2 - 2EE'\cos\phi + m^2c^4}$$

e) $\left(E - E' + mc^2\right)^2 = E^2 + E'^2 - 2EE'\cos\phi + m^2c^4$

$$\cancel{E^2} + \cancel{E'^2} - 2EE' + \cancel{m^2c^4} + 2(E-E')mc^2 = \cancel{E^2} + \cancel{E'^2} - 2EE'\cos\phi + \cancel{m^2c^4}$$

$$(E - E')mc^2 = EE'(1-\cos\phi)$$

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{mc^2}(1-\cos\phi)$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{hc}{mc^2}(1-\cos\phi)$$

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\phi)}$$

//

Questão 3:

a)

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} K x^2$$

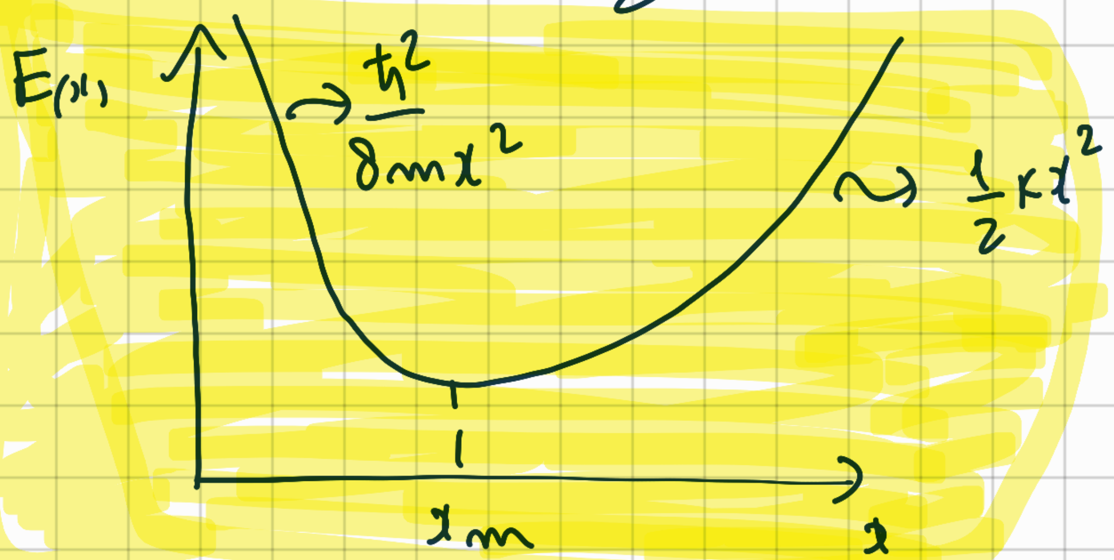
$$p x = \frac{\hbar}{2} \; ; \; p = \frac{\hbar}{2x}$$

$$E(x) = \frac{\hbar^2}{4x^2} \frac{1}{2m} + \frac{1}{2} K x^2$$

$$E(x) = \frac{\hbar^2}{8m} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} K x^2$$

$$x \to 0 \qquad E(x) \longrightarrow \frac{\hbar^2}{8mx^2}$$

$$x \to \infty \qquad E(x) \longrightarrow \frac{1}{2} K x^2$$



Os comportamentos assintóticos de $E(x)$, quando $x \to \infty$ e $x \to 0$ indicam que a função $E(x)$ passa por um mínimo em x_m.

b) $\frac{dE}{dx} = 0$, em $x = x_m$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\hbar^2}{8m} \frac{d}{dx}(x^{-2}) + \frac{1}{2} K \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\hbar^2}{8m} (-2) x^{-3} + \frac{1}{2} K \, 2x$$

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{\hbar^2}{4m} \frac{1}{x^3} + Kx$$

Em $x = x_m$, temos:

$$-\frac{\hbar^2}{4m x_m^3} + K x_m = 0$$

$$K x_m = \frac{\hbar^2}{4m x_m^3}$$

$$x_m^4 = \frac{\hbar^2}{4mK}$$

$$x_m = \left(\frac{\hbar^2}{4mK}\right)^{\frac{1}{4}}$$

c) $$E_m = \frac{\hbar^2}{8m}\frac{1}{x_m^2} + \frac{1}{2}K x_m^2$$

$$E_m = \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{4mK}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}K\left(\frac{\hbar^2}{4mK}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E_m = \frac{\hbar^2}{8}\cdot\frac{2}{\hbar}\left(\frac{K}{m}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{\hbar}{2}\left(\frac{K}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E_m = \frac{1}{4}\hbar\sqrt{\frac{K}{m}} + \frac{1}{4}\hbar\sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$E_m = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}\hbar\,\omega_0}$$

Questão 4.

[redacted]) Uma onda eletromagnética ilumina um aquário que está preenchido com água. Considere, a seguir, os aspectos da propagação da luz com a terminologia dos problemas de reflexão e refração da luz. Um feixe parte do vidro que forma o aquário, de índice de refração $n_v = 3$, e incide na interface plana vidro-água com o ângulo de incidência de $\theta_i = 60°$. Considere o índice de refração da água dado por $n_a = 4/3$. Calcule o que se pede e substitua os símbolos das constantes universais pelos seus valores numéricos respectivos, quando necessário. (Justifique todas as respostas!)

(a) Determine o ângulo de reflexão e o ângulo de refração dos feixes refletido e refratado na interface vidro-água, se existirem.

(b) Determine o ângulo de Brewster para um feixe incidente que parte do vidro em direção ao meio da água.

(c) Se um feixe de luz monocromático possui comprimento de onda de $600\,\mathrm{nm}$ no ar ($n_{\mathrm{ar}} = 1$), determine os comprimentos de onda desse feixe quando o mesmo está i) no interior do vidro (λ_v) e ii) no interior da água (λ_a).

(a - [redacted]) Pela lei da reflexão, o ângulo do feixe refletido é igual ao ângulo do feixe incidente, tal que $\theta_r = \theta_i = 60°$. Pela lei da refração (lei de Snell), determina-se que o ângulo do feixe refratado obedece a equação

$$n_v \mathrm{sen}(\theta_i) = n_a \mathrm{sen}(\theta_R) \rightarrow \mathrm{sen}(\theta_R) = \frac{9}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{8} > 1. \tag{5}$$

Essa equação mostra que não existe ângulo real θ_R que satisfaz a lei de Snell e, portanto, estamos na condição de REFLEXÃO TOTAL. Ou seja, o feixe propagante refratado não está presente (existe apenas uma onda evanescente na água) e o fluxo de energia do feixe incidente é transferido totalmente para o feixe refletido.

(b - [redacted]) Para o ângulo de Brewster, o feixe refletido faz $90°$ com o feixe refratado de forma que o ângulo do raio incidente satisfaz

$$\tan(\theta_B) = \frac{n_a}{n_v} = \frac{4}{9} \rightarrow \theta_B = \arctan(4/9) \simeq 0,4\mathrm{rad} = 23°. \tag{6}$$

No ângulo de Brewster, o raio refletido, se existir, é linearmente polarizado.

(c - [redacted]) As frequências naturais dos feixes incidente, refletido e refratado são idênticas e não se alteram quando um feixe sai de um meio e penetra em outro. Por isso, podemos escrever que

$$f = \frac{c}{\lambda_{\mathrm{ar}}} = \frac{c}{n_{\mathrm{vidro}}\lambda_{\mathrm{vidro}}} = \frac{c}{n_{\mathrm{agua}}\lambda_{\mathrm{agua}}} \rightarrow \lambda_{\mathrm{vidro}} = \frac{\lambda_{\mathrm{ar}}}{n_{\mathrm{vidro}}}\,,\ \lambda_{\mathrm{agua}} = \frac{\lambda_{\mathrm{ar}}}{n_{\mathrm{agua}}}, \tag{7}$$

e os valores procurados são $\lambda_{\mathrm{vidro}} = 200\,\mathrm{nm}$ e $\lambda_{\mathrm{agua}} = 450\,\mathrm{nm}$.