Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Física IV-A – 2023/2 – P2- 27/09/2023
VERSÃO: A

Formulário

CONSTANTES NUMÉRICAS

$\mu_0 = 1\times10^{-6}$ H/m; $\varepsilon_0 = (1/9)\times10^{-10}$ F/m; $c = 3\times10^{8}$ m/s; $h = 6\times10^{-34}$ J $\cdot$ s; $h = 3\times10^{-15}$ eV$\cdot$ s; $\hbar = h/(2\pi)$; $hc = 900$ eV$\cdot$ nm; $e = 2\times10^{-19}$ C; 1 eV $= 2\times10^{-19}$ J; 1 J $= 5\times10^{18}$ eV; $m_pc^2 = 1000$ MeV; $m_ec^2 = 0{,}5$ MeV; $m_e = 10^{-30}$ kg; 1μm $= 10^{-6}$ m; 1 nm $= 10^{-9}$ m; 1 Å $= 10^{-10}$ m; 1 pm $= 10^{-12}$ m; 1 GeV $= 10^{3}$ MeV $= 10^{9}$ eV; $\lambda_c = 1{,}8$ pm; $E_1 = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = -25$ eV; $a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = (9/\pi)\times10^{-11}$ m; $\mathrm{sen}(30^\circ) = 1/2$; $\mathrm{sen}(45^\circ) = \sqrt{2}/2$; $\mathrm{sen}(60^\circ) = \sqrt{3}/2$; $\mathrm{sen}^2(\theta) = [1-\cos(2\theta)]/2$.

FORMULÁRIO GERAL

$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$; $\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$; $E = K + m_0c^2 = \gamma m_0c^2$; $p = \gamma m_0 u$; $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$; $x = \gamma(x' + ut')$; $t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$; $v_x = \frac{v'_x+u}{1+(v'_xu)/c^2}$; $v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1+(v'_xu)/c^2)}$; $p_x = \gamma(p'_x + uE'/c^2)$, $E = \gamma(E' + up'_x)$, $p_y = p'_y$; $\lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{h}{mc}\right)(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta)$; $f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$; $\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$; $\Delta E\cdot\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$; $L_n = n\hbar$; $r_n = n^2a_0$; $v_n = e^2/(2n\epsilon_0 h)$; $E_n = \frac{E_1}{n^2}$; $E_n = n^2h^2/(8mL^2)$; $eV_0 = hf - w$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x)$; $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$; $k_2 = \sqrt{2m|E-V|}/\hbar$; $R = (\sqrt{E}-\sqrt{E-V})^2/(\sqrt{E}+\sqrt{E-V})^2$; $T = 1-R$; $\langle x\rangle = (2k_2)^{-1} = \hbar/\sqrt{8m(E-V)}$; $T = [1+(\frac{V^2}{4E(E-V)})\mathrm{sen}^2(k_2L)]^{-1}$; $T = [1+(\frac{V^2}{4E(V-E)})\mathrm{senh}^2(k_2L)]^{-1}$, $T \simeq \frac{16E(V-E)}{V^2}\exp[-\sqrt{8m(V-E)}L/\hbar]$.

Seção 1. Questões objetivas (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. Qual diferença de potencial V deve ser aplicada para acelerar um elétron, massa de repouso m e carga e, do repouso até atingir uma velocidade de módulo igual a $4c/5$?

   (a) $0 < V \leq 0,2mc^2/e$

   (b) $0,2mc^2/e < V \leq 0,4mc^2/e$

   (c) $0,4mc^2/e < V \leq 0,6mc^2/e$

   (d) $0,6mc^2/e < V \leq 0,8mc^2/e$

2. O píon negativo (π^-) é uma partícula instável com um tempo de vida médio τ, medido em seu referencial de repouso. Se o píon é posto para se mover com uma velocidade muito grande, seu tempo de vida média medido no referencial do laboratório é de 16τ. Qual é o módulo da velocidade v do píon no referencial do laboratório?

   (a) $c\sqrt{253}/16$

   (b) $c\sqrt{255}/16$

   (c) $c\sqrt{257}/16$

   (d) $c\sqrt{259}/16$

3. Qual é o comprimento de onda de de Broglie (λ_e) de elétrons livres para a velocidade média v_e dos elétrons à temperatura ambiente $T = 300\,K$? Considere $v_e = \sqrt{3kT/m_e}$, onde $k \approx 10^{-23}\,J/K$ é a constante de Boltzmann.

   (a) $0,1\,\text{nm} < \lambda_e \leq 1\,\text{nm}$

   (b) $1\,\text{nm} < \lambda_e \leq 10\,\text{nm}$

   (c) $10\text{nm} < \lambda_e \leq 20\,\text{nm}$

   (d) $20\,\text{nm} < \lambda_e \leq 30\,nm$

4. Num dado referencial A observa-se um anel circular de raio R, posicionado no plano xy, mover-se como um todo com velocidade $+v\hat{y}$. Num outro referencial B, o mesmo anel é observado parado no plano xy. Considerando paralelos entre si os eixos x, e também paralelos entre si os eixos y dos dois referenciais, a forma do anel descrita no referencial B é dada por:

   (a) Uma elipse, cujo eixo MAIOR é paralelo ao eixo x.

   (b) Uma elipse, cujo eixo MAIOR é paralelo ao eixo y.

   (c) Uma circunferência, cujo raio é MAIOR que R.

   (d) Uma circunferência cujo raio é MENOR que R.

5. Observa-se o efeito fotoelétrico quando uma superfície metálica é bombardeada por fótons de energia de 4 eV. Com esses fótons, o efeito fotoelétrico cessa quando o potencial de freamento atinge o valor de 2 volts. Qual a energia cinética máxima dos fotoelétrons quando se triplica a energia dos fótons incidentes?

   (a) 10 eV

   (b) 8 eV

   (c) 6 eV

   (d) 4 eV

6. Usando o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, calcule a razão entre os módulos das velocidade de elétron no nível 3 (v_3) e no estado fundamental (v_1). v_3/v_1 é:

   (a) 1/9

   (b) 3

   (c) 1/3

   (d) 9

7. Um fóton de raio X de comprimento de onda λ colide com um elétron livre que está inicialmente em repouso. Após a colisão o comprimento de onda do fóton é $\lambda' = 1,02\lambda$. Se o elétron após a colisão é parado repentinamente (por exemplo num alvo sólido) e toda sua energia cinética é usada para criar um outro fóton, qual é o comprimento de onda λ_b do fóton criado?

   (a) $25\lambda < \lambda_b \leq 35\lambda$

   (b) $25\lambda < \lambda_b \leq 45\lambda$

   (c) $45\lambda < \lambda_b \leq 55\lambda$

   (d) $55\lambda < \lambda_b \leq 65\lambda$

8. Duas partículas A e B são criados num acelerador de alta energia e se movem na mesma direção, mas em sentidos opostos. O módulo da velocidade da partícula A, medido no laboratório, é $v_A = 6c/10$, e o módulo da velocidade de uma partícula em relação à outra é $9c/10$. Qual é o módulo da velocidade da partícula B no referencial do laboratório?

   (a) $0,5c < v_B \leq 0,6c$

   (b) $0,6c < v_B \leq 0,7c$

   (c) $0,7c < v_B \leq 0,8c$

   (d) $0,8c < v_B \leq 0,9c$

Seção 2. Questões discursivas (2,0 + 3,2 = 5,2 pontos)

1. [2,0 pontos]
Físicos e engenheiros de todo o mundo se juntaram para construir o maior acelerador de partículas do mundo, o LHC no CERN, na Suíça. A máquina acelera prótons a altas energias cinéticas num anel subterrâneo de 27 km de circunferência. Responda às questões que seguem, tendo em conta que RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

   (a) [1,2 ponto] Encontre uma expressão para v/c, onde v é o módulo da velocidade de um próton no LHC quando sua energia cinética é K em termos de c, da massa m de repouso do próton e de K.

   (b)[0,8 ponto] Para $K = 7\,\mathrm{TeV} = 7,0 \times 10^{12}\,\mathrm{eV}$ encontre a massa relativística do próton (m_{rel}) em termos de sua massa de repouso m.

2. [3,2 pontos]
Uma partícula de massa m encontra-se confinada em uma caixa unidimensional descrita pela região $0 \leq x \leq 2L$. A energia potencial da partícula é $U(x) = 0$ para pontos no interior da caixa e $U(x) = \infty$ para pontos fora da caixa. Responda às questões que seguem, tendo em conta que RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

   (a) [1,2 ponto] Utilizando a equação de Schrödinger independente do tempo determine os níveis de energia E_n da partícula na caixa.

   (b) [0,4 ponto] Qual é a energia do segundo estado excitado do sistema?

   (c) [1,2 ponto] Determine a função de onda independente do tempo (normalizada) do estado fundamental.

   (d) [0,4 ponto] Se 1000 sistemas idênticos ao descrito acima fossem preparados para estarem no estado fundamental, quantas partículas seriam encontradas entre $x = L/2$ e $x = L/2 + 0,01L$?

3.

Gabarito para Versão $\boxed{\text{A}}$

Seção 1. Questões objetivas (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. Qual diferença de potencial V deve ser aplicada para acelerar um elétron, massa de repouso m e carga e, do repouso até atingir uma velocidade de módulo igual a $4c/5$?

   (a) $0 < V \leq 0,2mc^2/e$
   (b) $0,2mc^2/e < V \leq 0,4mc^2/e$
   (c) $0,4mc^2/e < V \leq 0,6mc^2/e$
   $\boxed{\text{(d)}}$ $0,6mc^2/e < V \leq 0,8mc^2/e$

2. O píon negativo (π^-) é uma partícula instável com um tempo de vida médio τ, medido em seu referencial de repouso. Se o píon é posto para se mover com uma velocidade muito grande, seu tempo de vida média medido no referencial do laboratório é de 16τ. Qual é o módulo da velocidade v do píon no referencial do laboratório?

   (a) $c\sqrt{253}/16$
   $\boxed{\text{(b)}}$ $c\sqrt{255}/16$
   (c) $c\sqrt{257}/16$
   (d) $c\sqrt{259}/16$

3. Qual é o comprimento de onda de de Broglie (λ_e) de elétrons livres para a velocidade média v_e dos elétrons à temperatura ambiente $T = 300\,K$? Considere $v_e = \sqrt{3kT/m_e}$, onde $k \approx 10^{-23}\,J/K$ é a constante de Boltzmann.

   (a) $0,1\,\text{nm} < \lambda_e \leq 1\,\text{nm}$
   $\boxed{\text{(b)}}$ $1\,\text{nm} < \lambda_e \leq 10\,\text{nm}$
   (c) $10\text{nm} < \lambda_e \leq 20\,\text{nm}$
   (d) $20\,\text{nm} < \lambda_e \leq 30\,nm$

4. Num dado referencial A observa-se um anel circular de raio R, posicionado no plano xy, mover-se como um todo com velocidade $+v\hat{y}$. Num outro referencial B, o mesmo anel é observado parado no plano xy. Considerando paralelos entre si os eixos x, e também paralelos entre si os eixos y dos dois referenciais, a forma do anel descrita no referencial B é dada por:

   (a) Uma elipse, cujo eixo MAIOR é paralelo ao eixo x.
   $\boxed{\text{(b)}}$ Uma elipse, cujo eixo MAIOR é paralelo ao eixo y.
   (c) Uma circunferência, cujo raio é MAIOR que R.
   (d) Uma circunferência cujo raio é MENOR que R.

5. Observa-se o efeito fotoelétrico quando uma superfície metálica é bombardeada por fótons de energia de 4 eV. Com esses fótons, o efeito fotoelétrico cessa quando o potencial de freamento atinge o valor de 2 volts. Qual a energia cinética máxima dos fotoelétrons quando se triplica a energia dos fótons incidentes?

   $\boxed{\text{(a)}}$ 10 eV
   (b) 8 eV
   (c) 6 eV
   (d) 4 eV

6. Usando o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, calcule a razão entre os módulos das velocidade de elétron no nível 3 (v_3) e no estado fundamental (v_1). v_3/v_1 é:

   (a) 1/9
   (b) 3
   $\boxed{\text{(c)}}$ 1/3
   (d) 9

7. Um fóton de raio X de comprimento de onda λ colide com um elétron livre que está inicialmente em repouso. Após a colisão o comprimento de onda do fóton é $\lambda' = 1,02\lambda$. Se o elétron após a colisão é parado repentinamente (por exemplo num alvo sólido) e toda sua energia cinética é usada para criar um outro fóton, qual é o comprimento de onda λ_b do fóton criado?

   (a) $25\lambda < \lambda_b \leq 35\lambda$
   (b) $25\lambda < \lambda_b \leq 45\lambda$
   $\boxed{\text{(c)}}$ $45\lambda < \lambda_b \leq 55\lambda$
   (d) $55\lambda < \lambda_b \leq 65\lambda$

8. Duas partículas A e B são criados num acelerador de alta energia e se movem na mesma direção, mas em sentidos opostos. O módulo da velocidade da partícula A, medido no laboratório, é $v_A = 6c/10$, e o módulo da velocidade de uma partícula em relação à outra é $9c/10$. Qual é o módulo da velocidade da partícula B no referencial do laboratório?

   (a) $0,5c < v_B \leq 0,6c$
   $\boxed{\text{(b)}}$ $0,6c < v_B \leq 0,7c$
   (c) $0,7c < v_B \leq 0,8c$
   (d) $0,8c < v_B \leq 0,9c$

Seção 2. Questões discursivas (2,0 + 3,2 = 5,2 pontos)

1. [2,0 pontos]
   Físicos e engenheiros de todo o mundo se juntaram para construir o maior acelerador de partículas do mundo, o LHC no CERN, na Suíça. A máquina acelera prótons a altas energias cinéticas num anel subterrâneo de 27 km de circunferência. Responda às questões que seguem, tendo em conta que RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

   (a) [1,2 ponto] Encontre uma expressão para v/c, onde v é o módulo da velocidade de um próton no LHC quando sua energia cinética é K em termos de c, da massa m de repouso do próton e de K.

   (b)[0,8 ponto] Para $K = 7\,\text{TeV} = 7,0 \times 10^{12}\,\text{eV}$ encontre a massa relativística do próton (m_{rel}) em termos de sua massa de repouso m.

   Resolução:
   (a) A energia do próton é dada por:

$$E = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 = K + mc^2. \tag{1}$$

Isolando v^2/c^2 na expressão acima encontramos:

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m^2c^4}{(K + mc^2)^2}. \tag{2}$$

Após algumas manipulações matemáticas, encontra-se parra $(v/c)^2$ a expressão seguinte:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{K^2 + 2Kmc^2}{(K + mc^2)^2}. \tag{3}$$

Assim:

$$\boxed{\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{(1 + \frac{2mc^2}{K})}}{1 + \frac{mc^2}{K}}.} \tag{4}$$

(b) Da Equação (1) encontramos que:

$$m_{rel} = m\left(1 + \frac{K}{mc^2}\right). \tag{5}$$

Do formulário obtemos para o próton $mc^2 = 1000\,\text{MeV}$, substituindo na Equação (5):

$$m_{rel} = m\left(1 + \frac{7 \times 10^{12}\,\text{eV}}{1000 \times 10^6\,\text{eV}}\right), \tag{6}$$

$$\boxed{m_{rel} = 7001m.} \tag{7}$$

■

2. [3,2 pontos]
Uma partícula de massa m encontra-se confinada em uma caixa unidimensional descrita pela região $0 \leq x \leq 2L$. A energia potencial da partícula é $U(x) = 0$ para pontos no interior da caixa e $U(x) = \infty$ para pontos fora da caixa. Responda às questões que seguem, tendo em conta que RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

(a) [1,2 ponto] Utilizando a equação de Schrödinger independente do tempo determine os níveis de energia E_n da partícula na caixa.

(b) [0,4 ponto] Qual é a energia do segundo estado excitado do sistema?

(c) [1,2 ponto] Determine a função de onda independente do tempo (normalizada) do estado fundamental.

(d) [0,4 ponto] Se 1000 sistemas idênticos ao descrito acima fossem preparados para estarem no estado fundamental, quantas partículas seriam encontradas entre $x = L/2$ e $x = L/2 + 0,01L$?

Resolução:
(a) Do formulário, temos que a equação de Schrödinger independente do tempo para uma partícula de massa m é dada por:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x), \tag{8}$$

onde $u(x)$ é a função de onda independente do tempo. A função de onda completa sendo dada por:

$$\Psi(x,t) = u(x)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}. \tag{9}$$

Para a partícula numa caixa, na região do interior da caixa $U(x) = 0$ e a função de onda é nula nos contornos, tal que para o caso em questão:

$$u(0) = u(2L) = 0. \tag{10}$$

Assim, a equação diferencial que precisamos resolver é dada por:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}u(x) = 0, \tag{11}$$

com as condições de contorno descritas pela Equação (10). Essa é a equação do oscilador harmônico simples, sua solução é dada por:

$$u(x) = A\cos(kx) + B\text{sen}(kx), \tag{12}$$

com A e B constantes e $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. Após aplicar as condições de contorno, encontramos:

$$A = 0, \tag{13}$$

e:

$$k_n = \frac{n\pi}{2L}, \quad n = \{1, 2, 3, 4, ...\}. \tag{14}$$

Assim:

$$\boxed{E_n = \left(\frac{\hbar^2\pi^2}{8mL^2}\right)n^2,} \quad n = \{1, 2, 3, 4, ...\}. \tag{15}$$

(b) O estado fundamental é descrito por $n = 1$, assim o segundo estado excitado é descrito por $n = 3$, e:

$$E_3 = \left(\frac{\hbar^2\pi^2}{8mL^2}\right)3^2, \tag{16}$$

$$\boxed{E_3 = \frac{9\hbar^2\pi^2}{8mL^2}.} \tag{17}$$

(c) A função de onda do estado fundamental é dada por:

$$u_1(x) = B\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right). \tag{18}$$

Pela condição de normalização da função de onda temos:

$$B^2\int_0^{2L} u_1(x)^2 dx = 1, \tag{19}$$

$$B^2\int_0^{2L} \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right) dx = 1. \tag{20}$$

Usando a identidade trigonométrica fornecida no formulário:

$$B^2\int_0^{2L} \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{2L}\right)\right] dx = 1. \tag{21}$$

A integral da função cosseno é nula (soma num período completo), assim:

$$\frac{B^2}{2}2L = 1, \tag{22}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{L}} \tag{23}$$

e:

$$\boxed{u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right).} \tag{24}$$

(d) A probabilidade $P(x)$ de encontrar uma partícula entre x e $x + dx$ no estado fundamental é dada por:

$$P(x) = u_1(x)^2 dx. \tag{25}$$

Assim, para $x = L/2$ e $dx = 0,01L$:

$$P(L/2) = \left[\frac{1}{\sqrt{L}}\text{sen}\left(\frac{\pi(L/2)}{2L}\right)\right]^2 0,01L. \tag{26}$$

$$P(L/2) = \frac{0,01L}{L}\text{sen}^2(\pi/4) = 0,005. \tag{27}$$

Assim, $0,5\%$ das partículas serão encontradas entre $x = L/2$ e $x = L/2 + 0,01L$, ou seja, 5 partículas.

■

3.

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Física IV-A – 2023/2 – P2- 27/09/2023
VERSÃO: B

Formulário

CONSTANTES NUMÉRICAS

$\mu_0 = 1\times10^{-6}$ H/m; $\varepsilon_0 = (1/9)\times10^{-10}$ F/m; $c = 3\times10^8$ m/s; $h = 6\times10^{-34}$ J $\cdot$ s; $h = 3\times10^{-15}$ eV$\cdot$ s; $\hbar = h/(2\pi)$; $hc = 900$ eV$\cdot$ nm; $e = 2\times10^{-19}$ C; 1 eV $= 2\times10^{-19}$ J; 1 J $= 5\times10^{18}$ eV; $m_pc^2 = 1000$ MeV; $m_ec^2 = 0{,}5$ MeV; $m_e = 10^{-30}$ kg; 1μm $= 10^{-6}$ m; 1 nm $= 10^{-9}$ m; 1 Å $= 10^{-10}$ m; 1 pm $= 10^{-12}$ m; 1 GeV $= 10^3$ MeV $= 10^9$ eV; $\lambda_c = 1{,}8$ pm; $E_1 = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = -25$ eV; $a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = (9/\pi)\times10^{-11}$ m; $\text{sen}(30^\circ) = 1/2$; $\text{sen}(45^\circ) = \sqrt{2}/2$; $\text{sen}(60^\circ) = \sqrt{3}/2$; $\text{sen}^2(\theta) = [1-\cos(2\theta)]/2$.

FORMULÁRIO GERAL

$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$; $\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$; $E = K + m_0c^2 = \gamma m_0c^2$; $p = \gamma m_0 u$; $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$; $x = \gamma(x' + ut')$; $t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$; $v_x = \frac{v_x'+u}{1+(v_x'u)/c^2}$; $v_y = \frac{v_y'}{\gamma(1+(v_x'u)/c^2)}$; $p_x = \gamma(p_x' + uE'/c^2)$, $E = \gamma(E' + up_x')$, $p_y = p_y'$; $\lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{h}{mc}\right)(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta)$; $f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$; $\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$; $\Delta E\cdot\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$; $L_n = n\hbar$; $r_n = n^2a_0$; $v_n = e^2/(2n\epsilon_0 h)$; $E_n = \frac{E_1}{n^2}$; $E_n = n^2h^2/(8mL^2)$; $eV_0 = hf - w$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x)$; $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$; $k_2 = \sqrt{2m|E-V|}/\hbar$; $R = (\sqrt{E}-\sqrt{E-V})^2/(\sqrt{E}+\sqrt{E-V})^2$; $T = 1-R$; $\langle x\rangle = (2k_2)^{-1} = \hbar/\sqrt{8m(E-V)}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(E-V)})\text{sen}^2(k_2L)]^{-1}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(V-E)})\text{senh}^2(k_2L)]^{-1}$, $T \simeq \frac{16E(V-E)}{V^2}\exp[-\sqrt{8m(V-E)}L/\hbar]$.

Seção 1. Questões objetivas (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. Observa-se o efeito fotoelétrico quando uma superfície metálica é bombardeada por fótons de energia de 4 eV. Com esses fótons, o efeito fotoelétrico cessa quando o potencial de freamento atinge o valor de 2 volts. Qual a energia cinética máxima dos fotoelétrons quando se triplica a energia dos fótons incidentes?
   (a) 10 eV
   (b) 8 eV
   (c) 6 eV
   (d) 4 eV

2. Um fóton de raio X de comprimento de onda λ colide com um elétron livre que está inicialmente em repouso. Após a colisão o comprimento de onda do fóton é $\lambda' = 1,02\lambda$. Se o elétron após a colisão é parado repentinamente (por exemplo num alvo sólido) e toda sua energia cinética é usada para criar um outro fóton, qual é o comprimento de onda λ_b do fóton criado?
   (a) $25\lambda < \lambda_b \leq 35\lambda$
   (b) $25\lambda < \lambda_b \leq 45\lambda$
   (c) $45\lambda < \lambda_b \leq 55\lambda$
   (d) $55\lambda < \lambda_b \leq 65\lambda$

3. Qual diferença de potencial V deve ser aplicada para acelerar um elétron, massa de repouso m e carga e, do repouso até atingir uma velocidade de módulo igual a $4c/5$?
   (a) $0 < V \leq 0,2mc^2/e$
   (b) $0,2mc^2/e < V \leq 0,4mc^2/e$
   (c) $0,4mc^2/e < V \leq 0,6mc^2/e$
   (d) $0,6mc^2/e < V \leq 0,8mc^2/e$

4. O píon negativo (π^-) é uma partícula instável com um tempo de vida médio τ, medido em seu referencial de repouso. Se o píon é posto para se mover com uma velocidade muito grande, seu tempo de vida média medido no referencial do laboratório é de 16τ. Qual é o módulo da velocidade v do píon no referencial do laboratório?

   (a) $c\sqrt{253}/16$

   (b) $c\sqrt{255}/16$

   (c) $c\sqrt{257}/16$

   (d) $c\sqrt{259}/16$

5. Usando o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, calcule a razão entre os módulos das velocidade de elétron no nível 3 (v_3) e no estado fundamental (v_1). v_3/v_1 é:

   (a) 1/9

   (b) 3

   (c) 1/3

   (d) 9

6. Duas partículas A e B são criados num acelerador de alta energia e se movem na mesma direção, mas em sentidos opostos. O módulo da velocidade da partícula A, medido no laboratório, é $v_A = 6c/10$, e o módulo da velocidade de uma partícula em relação à outra é $9c/10$. Qual é o módulo da velocidade da partícula B no referencial do laboratório?

   (a) $0,5c < v_B \leq 0,6c$

   (b) $0,6c < v_B \leq 0,7c$

   (c) $0,7c < v_B \leq 0,8c$

   (d) $0,8c < v_B \leq 0,9c$

7. Qual é o comprimento de onda de de Broglie (λ_e) de elétrons livres para a velocidade média v_e dos elétrons à temperatura ambiente $T = 300\,K$? Considere $v_e = \sqrt{3kT/m_e}$, onde $k \approx 10^{-23}\,J/K$ é a constante de Boltzmann.

   (a) $0,1\,\mathrm{nm} < \lambda_e \leq 1\,\mathrm{nm}$

   (b) $1\,\mathrm{nm} < \lambda_e \leq 10\,\mathrm{nm}$

   (c) $10\mathrm{nm} < \lambda_e \leq 20\,\mathrm{nm}$

   (d) $20\,\mathrm{nm} < \lambda_e \leq 30\,nm$

8. Num dado referencial A observa-se um anel circular de raio R, posicionado no plano xy, mover-se como um todo com velocidade $+v\hat{y}$. Num outro referencial B, o mesmo anel é observado parado no plano xy. Considerando paralelos entre si os eixos x, e também paralelos entre si os eixos y dos dois referenciais, a forma do anel descrita no referencial B é dada por:

   (a) Uma elipse, cujo eixo MAIOR é paralelo ao eixo x.

   (b) Uma elipse, cujo eixo MAIOR é paralelo ao eixo y.

   (c) Uma circunferência, cujo raio é MAIOR que R.

   (d) Uma circunferência cujo raio é MENOR que R.

Seção 2. Questões discursivas (2,0 + 3,2 = 5,2 pontos)

1. [2,0 pontos]
Físicos e engenheiros de todo o mundo se juntaram para construir o maior acelerador de partículas do mundo, o LHC no CERN, na Suíça. A máquina acelera prótons a altas energias cinéticas num anel subterrâneo de $27\,km$ de circunferência. Responda às questões que seguem, tendo em conta que RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

   (a) [1,2 ponto] Encontre uma expressão para v/c, onde v é o módulo da velocidade de um próton no LHC quando sua energia cinética é K em termos de c, da massa m de repouso do próton e de K.

   (b)[0,8 ponto] Para $K = 7\,\text{TeV} = 7,0 \times 10^{12}\,\text{eV}$ encontre a massa relativística do próton (m_{rel}) em termos de sua massa de repouso m.

2. [3,2 pontos]
Uma partícula de massa m encontra-se confinada em uma caixa unidimensional descrita pela região $0 \leq x \leq 2L$. A energia potencial da partícula é $U(x) = 0$ para pontos no interior da caixa e $U(x) = \infty$ para pontos fora da caixa. Responda às questões que seguem, tendo em conta que RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

   (a) [1,2 ponto] Utilizando a equação de Schrödinger independente do tempo determine os níveis de energia E_n da partícula na caixa.

   (b) [0,4 ponto] Qual é a energia do segundo estado excitado do sistema?

   (c) [1,2 ponto] Determine a função de onda independente do tempo (normalizada) do estado fundamental.

   (d) [0,4 ponto] Se 1000 sistemas idênticos ao descrito acima fossem preparados para estarem no estado fundamental, quantas partículas seriam encontradas entre $x = L/2$ e $x = L/2 + 0,01L$?

3.

Gabarito para Versão $\boxed{\text{B}}$

Seção 1. Questões objetivas (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. Observa-se o efeito fotoelétrico quando uma superfície metálica é bombardeada por fótons de energia de 4 eV. Com esses fótons, o efeito fotoelétrico cessa quando o potencial de freamento atinge o valor de 2 volts. Qual a energia cinética máxima dos fotoelétrons quando se triplica a energia dos fótons incidentes?

   $\boxed{\text{(a)}}$ 10 eV
   (b) 8 eV
   (c) 6 eV
   (d) 4 eV

2. Um fóton de raio X de comprimento de onda λ colide com um elétron livre que está inicialmente em repouso. Após a colisão o comprimento de onda do fóton é $\lambda' = 1,02\lambda$. Se o elétron após a colisão é parado repentinamente (por exemplo num alvo sólido) e toda sua energia cinética é usada para criar um outro fóton, qual é o comprimento de onda λ_b do fóton criado?

   (a) $25\lambda < \lambda_b \leq 35\lambda$
   (b) $25\lambda < \lambda_b \leq 45\lambda$
   $\boxed{\text{(c)}}$ $45\lambda < \lambda_b \leq 55\lambda$
   (d) $55\lambda < \lambda_b \leq 65\lambda$

3. Qual diferença de potencial V deve ser aplicada para acelerar um elétron, massa de repouso m e carga e, do repouso até atingir uma velocidade de módulo igual a $4c/5$?

   (a) $0 < V \leq 0,2mc^2/e$
   (b) $0,2mc^2/e < V \leq 0,4mc^2/e$
   (c) $0,4mc^2/e < V \leq 0,6mc^2/e$
   $\boxed{\text{(d)}}$ $0,6mc^2/e < V \leq 0,8mc^2/e$

4. O píon negativo (π^-) é uma partícula instável com um tempo de vida médio τ, medido em seu referencial de repouso. Se o píon é posto para se mover com uma velocidade muito grande, seu tempo de vida média medido no referencial do laboratório é de 16τ. Qual é o módulo da velocidade v do píon no referencial do laboratório?

   (a) $c\sqrt{253}/16$
   $\boxed{\text{(b)}}$ $c\sqrt{255}/16$
   (c) $c\sqrt{257}/16$
   (d) $c\sqrt{259}/16$

5. Usando o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, calcule a razão entre os módulos das velocidade de elétron no nível 3 (v_3) e no estado fundamental (v_1). v_3/v_1 é:

   (a) 1/9
   (b) 3
   $\boxed{\text{(c)}}$ 1/3
   (d) 9

6. Duas partículas A e B são criados num acelerador de alta energia e se movem na mesma direção, mas em sentidos opostos. O módulo da velocidade da partícula A, medido no laboratório, é $v_A = 6c/10$, e o módulo da velocidade de uma partícula em relação à outra é $9c/10$. Qual é o módulo da velocidade da partícula B no referencial do laboratório?

   (a) $0,5c < v_B \leq 0,6c$
   $\boxed{\text{(b)}}$ $0,6c < v_B \leq 0,7c$
   (c) $0,7c < v_B \leq 0,8c$
   (d) $0,8c < v_B \leq 0,9c$

7. Qual é o comprimento de onda de de Broglie (λ_e) de elétrons livres para a velocidade média v_e dos elétrons à temperatura ambiente $T = 300\,K$? Considere $v_e = \sqrt{3kT/m_e}$, onde $k \approx 10^{-23}\,J/K$ é a constante de Boltzmann.

   (a) $0,1\,\text{nm} < \lambda_e \leq 1\,\text{nm}$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $1\,\text{nm} < \lambda_e \leq 10\,\text{nm}$

   (c) $10\text{nm} < \lambda_e \leq 20\,\text{nm}$

   (d) $20\,\text{nm} < \lambda_e \leq 30\,nm$

8. Num dado referencial A observa-se um anel circular de raio R, posicionado no plano xy, mover-se como um todo com velocidade $+v\hat{y}$. Num outro referencial B, o mesmo anel é observado parado no plano xy. Considerando paralelos entre si os eixos x, e também paralelos entre si os eixos y dos dois referenciais, a forma do anel descrita no referencial B é dada por:

   (a) Uma elipse, cujo eixo MAIOR é paralelo ao eixo x.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Uma elipse, cujo eixo MAIOR é paralelo ao eixo y.

   (c) Uma circunferência, cujo raio é MAIOR que R.

   (d) Uma circunferência cujo raio é MENOR que R.

Seção 2. Questões discursivas (2,0 + 3,2 = 5,2 pontos)

1. [2,0 pontos]
Físicos e engenheiros de todo o mundo se juntaram para construir o maior acelerador de partículas do mundo, o LHC no CERN, na Suíça. A máquina acelera prótons a altas energias cinéticas num anel subterrâneo de 27 km de circunferência. Responda às questões que seguem, tendo em conta que RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

(a) [1,2 ponto] Encontre uma expressão para v/c, onde v é o módulo da velocidade de um próton no LHC quando sua energia cinética é K em termos de c, da massa m de repouso do próton e de K.

(b)[0,8 ponto] Para $K = 7\,\text{TeV} = 7,0 \times 10^{12}\,\text{eV}$ encontre a massa relativística do próton (m_{rel}) em termos de sua massa de repouso m.

Resolução:

(a) A energia do próton é dada por:

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}c^2 = K + mc^2. \tag{1}$$

Isolando v^2/c^2 na expressão acima encontramos:

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m^2c^4}{(K+mc^2)^2}. \tag{2}$$

Após algumas manipulações matemáticas, encontra-se parra $(v/c)^2$ a expressão seguinte:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{K^2 + 2Kmc^2}{(K+mc^2)^2}. \tag{3}$$

Assim:

$$\boxed{\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{(1+\frac{2mc^2}{K})}}{1+\frac{mc^2}{K}}.} \tag{4}$$

(b) Da Equação (1) encontramos que:

$$m_{rel} = m\left(1 + \frac{K}{mc^2}\right). \tag{5}$$

Do formulário obtemos para o próton $mc^2 = 1000\,\text{MeV}$, substituindo na Equação (5):

$$m_{rel} = m\left(1 + \frac{7\times 10^{12}\,\text{eV}}{1000\times 10^6\,\text{eV}}\right), \tag{6}$$

$$\boxed{m_{rel} = 7001m.} \tag{7}$$

■

2. [3,2 pontos]
Uma partícula de massa m encontra-se confinada em uma caixa unidimensional descrita pela região $0 \leq x \leq 2L$. A energia potencial da partícula é $U(x) = 0$ para pontos no interior da caixa e $U(x) = \infty$ para pontos fora da caixa. Responda às questões que seguem, tendo em conta que RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

(a) [1,2 ponto] Utilizando a equação de Schrödinger independente do tempo determine os níveis de energia E_n da partícula na caixa.

(b) [0,4 ponto] Qual é a energia do segundo estado excitado do sistema?

(c) [1,2 ponto] Determine a função de onda independente do tempo (normalizada) do estado fundamental.

(d) [0,4 ponto] Se 1000 sistemas idênticos ao descrito acima fossem preparados para estarem no estado fundamental, quantas partículas seriam encontradas entre $x = L/2$ e $x = L/2 + 0,01L$?

Resolução:
(a) Do formulário, temos que a equação de Schrödinger independente do tempo para uma partícula de massa m é dada por:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x), \tag{8}$$

onde $u(x)$ é a função de onda independente do tempo. A função de onda completa sendo dada por:

$$\Psi(x,t) = u(x)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}. \tag{9}$$

Para a partícula numa caixa, na região do interior da caixa $U(x) = 0$ e a função de onda é nula nos contornos, tal que para o caso em questão:

$$u(0) = u(2L) = 0. \tag{10}$$

Assim, a equação diferencial que precisamos resolver é dada por:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}u(x) = 0, \tag{11}$$

com as condições de contorno descritas pela Equação (10). Essa é a equação do oscilador harmônico simples, sua solução é dada por:

$$u(x) = A\cos(kx) + B\text{sen}(kx), \tag{12}$$

com A e B constantes e $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. Após aplicar as condições de contorno, encontramos:

$$A = 0, \tag{13}$$

e:

$$k_n = \frac{n\pi}{2L}, \quad n = \{1, 2, 3, 4, ...\}. \tag{14}$$

Assim:

$$\boxed{E_n = \left(\frac{\hbar^2\pi^2}{8mL^2}\right)n^2,} \quad n = \{1, 2, 3, 4, ...\}. \tag{15}$$

(b) O estado fundamental é descrito por $n = 1$, assim o segundo estado excitado é descrito por $n = 3$, e:

$$E_3 = \left(\frac{\hbar^2\pi^2}{8mL^2}\right)3^2, \tag{16}$$

$$\boxed{E_3 = \frac{9\hbar^2\pi^2}{8mL^2}.} \tag{17}$$

(c) A função de onda do estado fundamental é dada por:

$$u_1(x) = B\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right). \tag{18}$$

Pela condição de normalização da função de onda temos:

$$B^2\int_0^{2L} u_1(x)^2 dx = 1, \tag{19}$$

$$B^2\int_0^{2L} \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right) dx = 1. \tag{20}$$

Usando a identidade trigonométrica fornecida no formulário:

$$B^2\int_0^{2L} \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{2L}\right)\right] dx = 1. \tag{21}$$

A integral da função cosseno é nula (soma num período completo), assim:

$$\frac{B^2}{2}2L = 1, \tag{22}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{L}} \tag{23}$$

e:

$$\boxed{u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right).} \tag{24}$$

(d) A probabilidade $P(x)$ de encontrar uma partícula entre x e $x + dx$ no estado fundamental é dada por:

$$P(x) = u_1(x)^2 dx. \tag{25}$$

Assim, para $x = L/2$ e $dx = 0,01L$:

$$P(L/2) = \left[\frac{1}{\sqrt{L}}\text{sen}\left(\frac{\pi(L/2)}{2L}\right)\right]^2 0,01L. \tag{26}$$

$$P(L/2) = \frac{0,01L}{L}\text{sen}^2(\pi/4) = 0,005. \tag{27}$$

Assim, $0,5\%$ das partículas serão encontradas entre $x = L/2$ e $x = L/2 + 0,01L$, ou seja, 5 partículas.

■

3.

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Física IV-A – 2023/2 – P2- 27/09/2023
VERSÃO: C

Formulário

CONSTANTES NUMÉRICAS

$\mu_0 = 1\times10^{-6}$ H/m; $\varepsilon_0 = (1/9)\times10^{-10}$ F/m; $c = 3\times10^8$ m/s; $h = 6\times10^{-34}$ J $\cdot$ s; $h = 3\times10^{-15}$ eV$\cdot$ s; $\hbar = h/(2\pi)$; $hc = 900$ eV$\cdot$ nm; $e = 2\times10^{-19}$ C; 1 eV $= 2\times10^{-19}$ J; 1 J $= 5\times10^{18}$ eV; $m_pc^2 = 1000$ MeV; $m_ec^2 = 0{,}5$ MeV; $m_e = 10^{-30}$ kg; 1μm $= 10^{-6}$ m; 1 nm $= 10^{-9}$ m; 1 Å $= 10^{-10}$ m; 1 pm $= 10^{-12}$ m; 1 GeV $= 10^3$ MeV $= 10^9$ eV; $\lambda_c = 1{,}8$ pm; $E_1 = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = -25$ eV; $a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = (9/\pi)\times10^{-11}$ m; $\mathrm{sen}(30°) = 1/2$; $\mathrm{sen}(45°) = \sqrt{2}/2$; $\mathrm{sen}(60°) = \sqrt{3}/2$; $\mathrm{sen}^2(\theta) = [1-\cos(2\theta)]/2$.

FORMULÁRIO GERAL

$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$; $\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$; $E = K + m_0c^2 = \gamma m_0c^2$; $p = \gamma m_0 u$; $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$; $x = \gamma(x' + ut')$; $t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$; $v_x = \frac{v'_x+u}{1+(v'_xu)/c^2}$; $v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1+(v'_xu)/c^2)}$; $p_x = \gamma(p'_x + uE'/c^2)$, $E = \gamma(E' + up'_x)$, $p_y = p'_y$; $\lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{h}{mc}\right)(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta)$; $f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$; $\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$; $\Delta E\cdot\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$; $L_n = n\hbar$; $r_n = n^2a_0$; $v_n = e^2/(2n\epsilon_0 h)$; $E_n = \frac{E_1}{n^2}$; $E_n = n^2h^2/(8mL^2)$; $eV_0 = hf - w$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x)$; $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$; $k_2 = \sqrt{2m|E-V|}/\hbar$; $R = (\sqrt{E}-\sqrt{E-V})^2/(\sqrt{E}+\sqrt{E-V})^2$; $T = 1-R$; $\langle x\rangle = (2k_2)^{-1} = \hbar/\sqrt{8m(E-V)}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(E-V)})\mathrm{sen}^2(k_2L)]^{-1}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(V-E)})\mathrm{senh}^2(k_2L)]^{-1}$, $T \simeq \frac{16E(V-E)}{V^2}\exp[-\sqrt{8m(V-E)}L/\hbar]$.

Seção 1. Questões objetivas (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. Observa-se o efeito fotoelétrico quando uma superfície metálica é bombardeada por fótons de energia de 4 eV. Com esses fótons, o efeito fotoelétrico cessa quando o potencial de freamento atinge o valor de 2 volts. Qual a energia cinética máxima dos fotoelétrons quando se triplica a energia dos fótons incidentes?

   (a) 10 eV
   (b) 8 eV
   (c) 6 eV
   (d) 4 eV

2. O píon negativo (π^-) é uma partícula instável com um tempo de vida médio τ, medido em seu referencial de repouso. Se o píon é posto para se mover com uma velocidade muito grande, seu tempo de vida média medido no referencial do laboratório é de 16τ. Qual é o módulo da velocidade v do píon no referencial do laboratório?

   (a) $c\sqrt{253}/16$
   (b) $c\sqrt{255}/16$
   (c) $c\sqrt{257}/16$
   (d) $c\sqrt{259}/16$

3. Qual é o comprimento de onda de de Broglie (λ_e) de elétrons livres para a velocidade média v_e dos elétrons à temperatura ambiente $T = 300\,K$? Considere $v_e = \sqrt{3kT/m_e}$, onde $k \approx 10^{-23}\,J/K$ é a constante de Boltzmann.

   (a) $0,1\,\text{nm} < \lambda_e \leq 1\,\text{nm}$
   (b) $1\,\text{nm} < \lambda_e \leq 10\,\text{nm}$
   (c) $10\text{nm} < \lambda_e \leq 20\,\text{nm}$
   (d) $20\,\text{nm} < \lambda_e \leq 30\,nm$

4. Usando o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, calcule a razão entre os módulos das velocidade de elétron no nível 3 (v_3) e no estado fundamental (v_1). v_3/v_1 é:

   (a) 1/9

   (b) 3

   (c) 1/3

   (d) 9

5. Num dado referencial A observa-se um anel circular de raio R, posicionado no plano xy, mover-se como um todo com velocidade $+v\hat{y}$. Num outro referencial B, o mesmo anel é observado parado no plano xy. Considerando paralelos entre si os eixos x, e também paralelos entre si os eixos y dos dois referenciais, a forma do anel descrita no referencial B é dada por:

   (a) Uma elipse, cujo eixo MAIOR é paralelo ao eixo x.

   (b) Uma elipse, cujo eixo MAIOR é paralelo ao eixo y.

   (c) Uma circunferência, cujo raio é MAIOR que R.

   (d) Uma circunferência cujo raio é MENOR que R.

6. Duas partículas A e B são criados num acelerador de alta energia e se movem na mesma direção, mas em sentidos opostos. O módulo da velocidade da partícula A, medido no laboratório, é $v_A = 6c/10$, e o módulo da velocidade de uma partícula em relação à outra é $9c/10$. Qual é o módulo da velocidade da partícula B no referencial do laboratório?

   (a) $0,5c < v_B \leq 0,6c$

   (b) $0,6c < v_B \leq 0,7c$

   (c) $0,7c < v_B \leq 0,8c$

   (d) $0,8c < v_B \leq 0,9c$

7. Qual diferença de potencial V deve ser aplicada para acelerar um elétron, massa de repouso m e carga e, do repouso até atingir uma velocidade de módulo igual a $4c/5$?

   (a) $0 < V \leq 0,2mc^2/e$

   (b) $0,2mc^2/e < V \leq 0,4mc^2/e$

   (c) $0,4mc^2/e < V \leq 0,6mc^2/e$

   (d) $0,6mc^2/e < V \leq 0,8mc^2/e$

8. Um fóton de raio X de comprimento de onda λ colide com um elétron livre que está inicialmente em repouso. Após a colisão o comprimento de onda do fóton é $\lambda' = 1,02\lambda$. Se o elétron após a colisão é parado repentinamente (por exemplo num alvo sólido) e toda sua energia cinética é usada para criar um outro fóton, qual é o comprimento de onda λ_b do fóton criado?

   (a) $25\lambda < \lambda_b \leq 35\lambda$

   (b) $25\lambda < \lambda_b \leq 45\lambda$

   (c) $45\lambda < \lambda_b \leq 55\lambda$

   (d) $55\lambda < \lambda_b \leq 65\lambda$

Seção 2. Questões discursivas (2,0 + 3,2 = 5,2 pontos)

1. [2,0 pontos]
   Físicos e engenheiros de todo o mundo se juntaram para construir o maior acelerador de partículas do mundo, o LHC no CERN, na Suíça. A máquina acelera prótons a altas energias cinéticas num anel subterrâneo de 27 km de circunferência. Responda às questões que seguem, tendo em conta que RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

   (a) [1,2 ponto] Encontre uma expressão para v/c, onde v é o módulo da velocidade de um próton no LHC quando sua energia cinética é K em termos de c, da massa m de repouso do próton e de K.

   (b)[0,8 ponto] Para $K = 7\,\text{TeV} = 7,0 \times 10^{12}\,\text{eV}$ encontre a massa relativística do próton (m_{rel}) em termos de sua massa de repouso m.

2. [3,2 pontos]
   Uma partícula de massa m encontra-se confinada em uma caixa unidimensional descrita pela região $0 \leq x \leq 2L$. A energia potencial da partícula é $U(x) = 0$ para pontos no interior da caixa e $U(x) = \infty$ para pontos fora da caixa. Responda às questões que seguem, tendo em conta que RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

   (a) [1,2 ponto] Utilizando a equação de Schrödinger independente do tempo determine os níveis de energia E_n da partícula na caixa.

   (b) [0,4 ponto] Qual é a energia do segundo estado excitado do sistema?

   (c) [1,2 ponto] Determine a função de onda independente do tempo (normalizada) do estado fundamental.

   (d) [0,4 ponto] Se 1000 sistemas idênticos ao descrito acima fossem preparados para estarem no estado fundamental, quantas partículas seriam encontradas entre $x = L/2$ e $x = L/2 + 0,01L$?

3.

Gabarito para Versão $\boxed{\text{C}}$

Seção 1. Questões objetivas (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. Observa-se o efeito fotoelétrico quando uma superfície metálica é bombardeada por fótons de energia de 4 eV. Com esses fótons, o efeito fotoelétrico cessa quando o potencial de freamento atinge o valor de 2 volts. Qual a energia cinética máxima dos fotoelétrons quando se triplica a energia dos fótons incidentes?

   $\boxed{\text{(a)}}$ 10 eV
   (b) 8 eV
   (c) 6 eV
   (d) 4 eV

2. O píon negativo (π^-) é uma partícula instável com um tempo de vida médio τ, medido em seu referencial de repouso. Se o píon é posto para se mover com uma velocidade muito grande, seu tempo de vida média medido no referencial do laboratório é de 16τ. Qual é o módulo da velocidade v do píon no referencial do laboratório?

   (a) $c\sqrt{253}/16$
   $\boxed{\text{(b)}}$ $c\sqrt{255}/16$
   (c) $c\sqrt{257}/16$
   (d) $c\sqrt{259}/16$

3. Qual é o comprimento de onda de de Broglie (λ_e) de elétrons livres para a velocidade média v_e dos elétrons à temperatura ambiente $T = 300\,K$? Considere $v_e = \sqrt{3kT/m_e}$, onde $k \approx 10^{-23}\,J/K$ é a constante de Boltzmann.

   (a) $0,1\,\text{nm} < \lambda_e \leq 1\,\text{nm}$
   $\boxed{\text{(b)}}$ $1\,\text{nm} < \lambda_e \leq 10\,\text{nm}$
   (c) $10\text{nm} < \lambda_e \leq 20\,\text{nm}$
   (d) $20\,\text{nm} < \lambda_e \leq 30\,nm$

4. Usando o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, calcule a razão entre os módulos das velocidade de elétron no nível 3 (v_3) e no estado fundamental (v_1). v_3/v_1 é:

   (a) 1/9
   (b) 3
   $\boxed{\text{(c)}}$ 1/3
   (d) 9

5. Num dado referencial A observa-se um anel circular de raio R, posicionado no plano xy, mover-se como um todo com velocidade $+v\hat{y}$. Num outro referencial B, o mesmo anel é observado parado no plano xy. Considerando paralelos entre si os eixos x, e também paralelos entre si os eixos y dos dois referenciais, a forma do anel descrita no referencial B é dada por:

   (a) Uma elipse, cujo eixo MAIOR é paralelo ao eixo x.
   $\boxed{\text{(b)}}$ Uma elipse, cujo eixo MAIOR é paralelo ao eixo y.
   (c) Uma circunferência, cujo raio é MAIOR que R.
   (d) Uma circunferência cujo raio é MENOR que R.

6. Duas partículas A e B são criados num acelerador de alta energia e se movem na mesma direção, mas em sentidos opostos. O módulo da velocidade da partícula A, medido no laboratório, é $v_A = 6c/10$, e o módulo da velocidade de uma partícula em relação à outra é $9c/10$. Qual é o módulo da velocidade da partícula B no referencial do laboratório?

   (a) $0,5c < v_B \leq 0,6c$
   $\boxed{\text{(b)}}$ $0,6c < v_B \leq 0,7c$
   (c) $0,7c < v_B \leq 0,8c$
   (d) $0,8c < v_B \leq 0,9c$

7. Qual diferença de potencial V deve ser aplicada para acelerar um elétron, massa de repouso m e carga e, do repouso até atingir uma velocidade de módulo igual a $4c/5$?

(a) $0 < V \leq 0,2mc^2/e$

(b) $0,2mc^2/e < V \leq 0,4mc^2/e$

(c) $0,4mc^2/e < V \leq 0,6mc^2/e$

$\boxed{\text{(d)}}$ $0,6mc^2/e < V \leq 0,8mc^2/e$

8. Um fóton de raio X de comprimento de onda λ colide com um elétron livre que está inicialmente em repouso. Após a colisão o comprimento de onda do fóton é $\lambda' = 1,02\lambda$. Se o elétron após a colisão é parado repentinamente (por exemplo num alvo sólido) e toda sua energia cinética é usada para criar um outro fóton, qual é o comprimento de onda λ_b do fóton criado?

(a) $25\lambda < \lambda_b \leq 35\lambda$

(b) $25\lambda < \lambda_b \leq 45\lambda$

$\boxed{\text{(c)}}$ $45\lambda < \lambda_b \leq 55\lambda$

(d) $55\lambda < \lambda_b \leq 65\lambda$

Seção 2. Questões discursivas (2,0 + 3,2 = 5,2 pontos)

1. [2,0 pontos]
Físicos e engenheiros de todo o mundo se juntaram para construir o maior acelerador de partículas do mundo, o LHC no CERN, na Suíça. A máquina acelera prótons a altas energias cinéticas num anel subterrâneo de 27 km de circunferência. Responda às questões que seguem, tendo em conta que RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

(a) [1,2 ponto] Encontre uma expressão para v/c, onde v é o módulo da velocidade de um próton no LHC quando sua energia cinética é K em termos de c, da massa m de repouso do próton e de K.

(b)[0,8 ponto] Para $K = 7\,\text{TeV} = 7,0 \times 10^{12}\,\text{eV}$ encontre a massa relativística do próton (m_{rel}) em termos de sua massa de repouso m.

Resolução:

(a) A energia do próton é dada por:

$$E = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 = K + mc^2. \tag{1}$$

Isolando v^2/c^2 na expressão acima encontramos:

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m^2c^4}{(K + mc^2)^2}. \tag{2}$$

Após algumas manipulações matemáticas, encontra-se parra $(v/c)^2$ a expressão seguinte:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{K^2 + 2Kmc^2}{(K + mc^2)^2}. \tag{3}$$

Assim:

$$\boxed{\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{(1 + \frac{2mc^2}{K})}}{1 + \frac{mc^2}{K}}.} \tag{4}$$

(b) Da Equação (1) encontramos que:

$$m_{rel} = m\left(1 + \frac{K}{mc^2}\right). \tag{5}$$

Do formulário obtemos para o próton $mc^2 = 1000\,\text{MeV}$, substituindo na Equação (5):

$$m_{rel} = m\left(1 + \frac{7 \times 10^{12}\,\text{eV}}{1000 \times 10^6\,\text{eV}}\right), \tag{6}$$

$$\boxed{m_{rel} = 7001m.} \tag{7}$$

■

2. [3,2 pontos]
Uma partícula de massa m encontra-se confinada em uma caixa unidimensional descrita pela região $0 \leq x \leq 2L$. A energia potencial da partícula é $U(x) = 0$ para pontos no interior da caixa e $U(x) = \infty$ para pontos fora da caixa. Responda às questões que seguem, tendo em conta que RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

(a) [1,2 ponto] Utilizando a equação de Schrödinger independente do tempo determine os níveis de energia E_n da partícula na caixa.

(b) [0,4 ponto] Qual é a energia do segundo estado excitado do sistema?

(c) [1,2 ponto] Determine a função de onda independente do tempo (normalizada) do estado fundamental.

(d) [0,4 ponto] Se 1000 sistemas idênticos ao descrito acima fossem preparados para estarem no estado fundamental, quantas partículas seriam encontradas entre $x = L/2$ e $x = L/2 + 0,01L$?

Resolução:
(a) Do formulário, temos que a equação de Schrödinger independente do tempo para uma partícula de massa m é dada por:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x), \tag{8}$$

onde $u(x)$ é a função de onda independente do tempo. A função de onda completa sendo dada por:

$$\Psi(x,t) = u(x)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}. \tag{9}$$

Para a partícula numa caixa, na região do interior da caixa $U(x) = 0$ e a função de onda é nula nos contornos, tal que para o caso em questão:

$$u(0) = u(2L) = 0. \tag{10}$$

Assim, a equação diferencial que precisamos resolver é dada por:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}u(x) = 0, \tag{11}$$

com as condições de contorno descritas pela Equação (10). Essa é a equação do oscilador harmônico simples, sua solução é dada por:

$$u(x) = A\cos(kx) + B\text{sen}(kx), \tag{12}$$

com A e B constantes e $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. Após aplicar as condições de contorno, encontramos:

$$A = 0, \tag{13}$$

e:

$$k_n = \frac{n\pi}{2L}, \quad n = \{1, 2, 3, 4, ...\}. \tag{14}$$

Assim:

$$\boxed{E_n = \left(\frac{\hbar^2\pi^2}{8mL^2}\right)n^2,} \quad n = \{1, 2, 3, 4, ...\}. \tag{15}$$

(b) O estado fundamental é descrito por $n = 1$, assim o segundo estado excitado é descrito por $n = 3$, e:

$$E_3 = \left(\frac{\hbar^2\pi^2}{8mL^2}\right)3^2, \tag{16}$$

$$\boxed{E_3 = \frac{9\hbar^2\pi^2}{8mL^2}.} \tag{17}$$

(c) A função de onda do estado fundamental é dada por:

$$u_1(x) = B\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right). \tag{18}$$

Pela condição de normalização da função de onda temos:

$$B^2\int_0^{2L} u_1(x)^2 dx = 1, \tag{19}$$

$$B^2\int_0^{2L} \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right) dx = 1. \tag{20}$$

Usando a identidade trigonométrica fornecida no formulário:

$$B^2\int_0^{2L} \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{2L}\right)\right] dx = 1. \tag{21}$$

A integral da função cosseno é nula (soma num período completo), assim:

$$\frac{B^2}{2}2L = 1, \tag{22}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{L}} \tag{23}$$

e:

$$\boxed{u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right).} \tag{24}$$

(d) A probabilidade $P(x)$ de encontrar uma partícula entre x e $x + dx$ no estado fundamental é dada por:

$$P(x) = u_1(x)^2 dx. \tag{25}$$

Assim, para $x = L/2$ e $dx = 0,01L$:

$$P(L/2) = \left[\frac{1}{\sqrt{L}}\text{sen}\left(\frac{\pi(L/2)}{2L}\right)\right]^2 0,01L. \tag{26}$$

$$P(L/2) = \frac{0,01L}{L}\text{sen}^2(\pi/4) = 0,005. \tag{27}$$

Assim, $0,5\%$ das partículas serão encontradas entre $x = L/2$ e $x = L/2 + 0,01L$, ou seja, 5 partículas.

■

3.

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Física IV-A – 2023/2 – P2- 27/09/2023
VERSÃO: D

Formulário

CONSTANTES NUMÉRICAS

$\mu_0 = 1\times 10^{-6}$ H/m; $\varepsilon_0 = (1/9)\times 10^{-10}$ F/m; $c = 3\times 10^8$ m/s; $h = 6\times 10^{-34}$ J · s; $h = 3\times 10^{-15}$ eV· s; $\hbar = h/(2\pi)$; $hc = 900$ eV· nm; $e = 2\times 10^{-19}$ C; 1 eV $= 2\times 10^{-19}$ J; 1 J $= 5\times 10^{18}$ eV; $m_pc^2 = 1000$ MeV; $m_ec^2 = 0{,}5$ MeV; $m_e = 10^{-30}$ kg; 1μm $= 10^{-6}$ m; 1 nm $= 10^{-9}$ m; 1 Å $= 10^{-10}$ m; 1 pm $= 10^{-12}$ m; 1 GeV $= 10^3$ MeV $= 10^9$ eV; $\lambda_c = 1{,}8$ pm; $E_1 = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = -25$ eV; $a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = (9/\pi)\times 10^{-11}$ m; $\text{sen}(30°) = 1/2$; $\text{sen}(45°) = \sqrt{2}/2$; $\text{sen}(60°) = \sqrt{3}/2$; $\text{sen}^2(\theta) = [1-\cos(2\theta)]/2$.

FORMULÁRIO GERAL

$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$; $\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$; $E = K + m_0c^2 = \gamma m_0 c^2$; $p = \gamma m_0 u$; $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$; $x = \gamma(x' + ut')$; $t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$; $v_x = \frac{v'_x + u}{1+(v'_x u)/c^2}$; $v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1+(v'_x u)/c^2)}$; $p_x = \gamma(p'_x + uE'/c^2)$, $E = \gamma(E' + up'_x)$, $p_y = p'_y$; $\lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{h}{mc}\right)(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta)$; $f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$; $\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$; $\Delta E\cdot\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$; $L_n = n\hbar$; $r_n = n^2 a_0$; $v_n = e^2/(2n\epsilon_0 h)$; $E_n = \frac{E_1}{n^2}$; $E_n = n^2h^2/(8mL^2)$; $eV_0 = hf - w$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x)$; $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$; $k_2 = \sqrt{2m|E-V|}/\hbar$; $R = (\sqrt{E}-\sqrt{E-V})^2/(\sqrt{E}+\sqrt{E-V})^2$; $T = 1-R$; $\langle x\rangle = (2k_2)^{-1} = \hbar/\sqrt{8m(E-V)}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(E-V)})\text{sen}^2(k_2L)]^{-1}$; $T = [1+(\frac{V^2}{4E(V-E)})\text{senh}^2(k_2L)]^{-1}$, $T \simeq \frac{16E(V-E)}{V^2}\exp[-\sqrt{8m(V-E)}L/\hbar]$.

Seção 1. Questões objetivas (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. Duas partículas A e B são criados num acelerador de alta energia e se movem na mesma direção, mas em sentidos opostos. O módulo da velocidade da partícula A, medido no laboratório, é $v_A = 6c/10$, e o módulo da velocidade de uma partícula em relação à outra é $9c/10$. Qual é o módulo da velocidade da partícula B no referencial do laboratório?

   (a) $0,5c < v_B \leq 0,6c$
   (b) $0,6c < v_B \leq 0,7c$
   (c) $0,7c < v_B \leq 0,8c$
   (d) $0,8c < v_B \leq 0,9c$

2. Qual é o comprimento de onda de de Broglie (λ_e) de elétrons livres para a velocidade média v_e dos elétrons à temperatura ambiente $T = 300\,K$? Considere $v_e = \sqrt{3kT/m_e}$, onde $k \approx 10^{-23}\,J/K$ é a constante de Boltzmann.

   (a) $0,1\,\text{nm} < \lambda_e \leq 1\,\text{nm}$
   (b) $1\,\text{nm} < \lambda_e \leq 10\,\text{nm}$
   (c) $10\text{nm} < \lambda_e \leq 20\,\text{nm}$
   (d) $20\,\text{nm} < \lambda_e \leq 30\,nm$

3. Qual diferença de potencial V deve ser aplicada para acelerar um elétron, massa de repouso m e carga e, do repouso até atingir uma velocidade de módulo igual a $4c/5$?

   (a) $0 < V \leq 0,2mc^2/e$
   (b) $0,2mc^2/e < V \leq 0,4mc^2/e$
   (c) $0,4mc^2/e < V \leq 0,6mc^2/e$
   (d) $0,6mc^2/e < V \leq 0,8mc^2/e$

4. Um fóton de raio X de comprimento de onda λ colide com um elétron livre que está inicialmente em repouso. Após a colisão o comprimento de onda do fóton é $\lambda' = 1,02\lambda$. Se o elétron após a colisão é parado repentinamente (por exemplo num alvo sólido) e toda sua energia cinética é usada para criar um outro fóton, qual é o comprimento de onda λ_b do fóton criado?

   (a) $25\lambda < \lambda_b \leq 35\lambda$

   (b) $25\lambda < \lambda_b \leq 45\lambda$

   (c) $45\lambda < \lambda_b \leq 55\lambda$

   (d) $55\lambda < \lambda_b \leq 65\lambda$

5. Num dado referencial A observa-se um anel circular de raio R, posicionado no plano xy, mover-se como um todo com velocidade $+v\hat{y}$. Num outro referencial B, o mesmo anel é observado parado no plano xy. Considerando paralelos entre si os eixos x, e também paralelos entre si os eixos y dos dois referenciais, a forma do anel descrita no referencial B é dada por:

   (a) Uma elipse, cujo eixo MAIOR é paralelo ao eixo x.

   (b) Uma elipse, cujo eixo MAIOR é paralelo ao eixo y.

   (c) Uma circunferência, cujo raio é MAIOR que R.

   (d) Uma circunferência cujo raio é MENOR que R.

6. Observa-se o efeito fotoelétrico quando uma superfície metálica é bombardeada por fótons de energia de 4 eV. Com esses fótons, o efeito fotoelétrico cessa quando o potencial de freamento atinge o valor de 2 volts. Qual a energia cinética máxima dos fotoelétrons quando se triplica a energia dos fótons incidentes?

   (a) 10 eV

   (b) 8 eV

   (c) 6 eV

   (d) 4 eV

7. O píon negativo (π^-) é uma partícula instável com um tempo de vida médio τ, medido em seu referencial de repouso. Se o píon é posto para se mover com uma velocidade muito grande, seu tempo de vida média medido no referencial do laboratório é de 16τ. Qual é o módulo da velocidade v do píon no referencial do laboratório?

   (a) $c\sqrt{253}/16$

   (b) $c\sqrt{255}/16$

   (c) $c\sqrt{257}/16$

   (d) $c\sqrt{259}/16$

8. Usando o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, calcule a razão entre os módulos das velocidade de elétron no nível 3 (v_3) e no estado fundamental (v_1). v_3/v_1 é:

   (a) 1/9

   (b) 3

   (c) 1/3

   (d) 9

Seção 2. Questões discursivas (2,0 + 3,2 = 5,2 pontos)

1. [2,0 pontos]
   Físicos e engenheiros de todo o mundo se juntaram para construir o maior acelerador de partículas do mundo, o LHC no CERN, na Suíça. A máquina acelera prótons a altas energias cinéticas num anel subterrâneo de $27\,km$ de circunferência. Responda às questões que seguem, tendo em conta que RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

   (a) [1,2 ponto] Encontre uma expressão para v/c, onde v é o módulo da velocidade de um próton no LHC quando sua energia cinética é K em termos de c, da massa m de repouso do próton e de K.

   (b)[0,8 ponto] Para $K = 7\,\text{TeV} = 7,0 \times 10^{12}\,\text{eV}$ encontre a massa relativística do próton (m_{rel}) em termos de sua massa de repouso m.

2. [3,2 pontos]
   Uma partícula de massa m encontra-se confinada em uma caixa unidimensional descrita pela região $0 \leq x \leq 2L$. A energia potencial da partícula é $U(x) = 0$ para pontos no interior da caixa e $U(x) = \infty$ para pontos fora da caixa. Responda às questões que seguem, tendo em conta que RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

   (a) [1,2 ponto] Utilizando a equação de Schrödinger independente do tempo determine os níveis de energia E_n da partícula na caixa.

   (b) [0,4 ponto] Qual é a energia do segundo estado excitado do sistema?

   (c) [1,2 ponto] Determine a função de onda independente do tempo (normalizada) do estado fundamental.

   (d) [0,4 ponto] Se 1000 sistemas idênticos ao descrito acima fossem preparados para estarem no estado fundamental, quantas partículas seriam encontradas entre $x = L/2$ e $x = L/2 + 0,01L$?

3.

Gabarito para Versão $\boxed{\text{D}}$

Seção 1. Questões objetivas (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. Duas partículas A e B são criados num acelerador de alta energia e se movem na mesma direção, mas em sentidos opostos. O módulo da velocidade da partícula A, medido no laboratório, é $v_A = 6c/10$, e o módulo da velocidade de uma partícula em relação à outra é $9c/10$. Qual é o módulo da velocidade da partícula B no referencial do laboratório?

   (a) $0,5c < v_B \leq 0,6c$
   $\boxed{\text{(b)}}$ $0,6c < v_B \leq 0,7c$
   (c) $0,7c < v_B \leq 0,8c$
   (d) $0,8c < v_B \leq 0,9c$

2. Qual é o comprimento de onda de de Broglie (λ_e) de elétrons livres para a velocidade média v_e dos elétrons à temperatura ambiente $T = 300\,K$? Considere $v_e = \sqrt{3kT/m_e}$, onde $k \approx 10^{-23}\,J/K$ é a constante de Boltzmann.

   (a) $0,1\,\text{nm} < \lambda_e \leq 1\,\text{nm}$
   $\boxed{\text{(b)}}$ $1\,\text{nm} < \lambda_e \leq 10\,\text{nm}$
   (c) $10\text{nm} < \lambda_e \leq 20\,\text{nm}$
   (d) $20\,\text{nm} < \lambda_e \leq 30\,nm$

3. Qual diferença de potencial V deve ser aplicada para acelerar um elétron, massa de repouso m e carga e, do repouso até atingir uma velocidade de módulo igual a $4c/5$?

   (a) $0 < V \leq 0,2mc^2/e$
   (b) $0,2mc^2/e < V \leq 0,4mc^2/e$
   (c) $0,4mc^2/e < V \leq 0,6mc^2/e$
   $\boxed{\text{(d)}}$ $0,6mc^2/e < V \leq 0,8mc^2/e$

4. Um fóton de raio X de comprimento de onda λ colide com um elétron livre que está inicialmente em repouso. Após a colisão o comprimento de onda do fóton é $\lambda' = 1,02\lambda$. Se o elétron após a colisão é parado repentinamente (por exemplo num alvo sólido) e toda sua energia cinética é usada para criar um outro fóton, qual é o comprimento de onda λ_b do fóton criado?

   (a) $25\lambda < \lambda_b \leq 35\lambda$
   (b) $25\lambda < \lambda_b \leq 45\lambda$
   $\boxed{\text{(c)}}$ $45\lambda < \lambda_b \leq 55\lambda$
   (d) $55\lambda < \lambda_b \leq 65\lambda$

5. Num dado referencial A observa-se um anel circular de raio R, posicionado no plano xy, mover-se como um todo com velocidade $+v\hat{y}$. Num outro referencial B, o mesmo anel é observado parado no plano xy. Considerando paralelos entre si os eixos x, e também paralelos entre si os eixos y dos dois referenciais, a forma do anel descrita no referencial B é dada por:

   (a) Uma elipse, cujo eixo MAIOR é paralelo ao eixo x.
   $\boxed{\text{(b)}}$ Uma elipse, cujo eixo MAIOR é paralelo ao eixo y.
   (c) Uma circunferência, cujo raio é MAIOR que R.
   (d) Uma circunferência cujo raio é MENOR que R.

6. Observa-se o efeito fotoelétrico quando uma superfície metálica é bombardeada por fótons de energia de 4 eV. Com esses fótons, o efeito fotoelétrico cessa quando o potencial de freamento atinge o valor de 2 volts. Qual a energia cinética máxima dos fotoelétrons quando se triplica a energia dos fótons incidentes?

   $\boxed{\text{(a)}}$ 10 eV
   (b) 8 eV
   (c) 6 eV
   (d) 4 eV

7. O píon negativo (π^-) é uma partícula instável com um tempo de vida médio τ, medido em seu referencial de repouso. Se o píon é posto para se mover com uma velocidade muito grande, seu tempo de vida média medido no referencial do laboratório é de 16τ. Qual é o módulo da velocidade v do píon no referencial do laboratório?

   (a) $c\sqrt{253}/16$
   $\boxed{\text{(b)}}$ $c\sqrt{255}/16$
   (c) $c\sqrt{257}/16$
   (d) $c\sqrt{259}/16$

8. Usando o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, calcule a razão entre os módulos das velocidade de elétron no nível 3 (v_3) e no estado fundamental (v_1). v_3/v_1 é:

   (a) 1/9
   (b) 3
   $\boxed{\text{(c)}}$ 1/3
   (d) 9

Seção 2. Questões discursivas (2,0 + 3,2 = 5,2 pontos)

1. [2,0 pontos]
Físicos e engenheiros de todo o mundo se juntaram para construir o maior acelerador de partículas do mundo, o LHC no CERN, na Suíça. A máquina acelera prótons a altas energias cinéticas num anel subterrâneo de 27 km de circunferência. Responda às questões que seguem, tendo em conta que RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

(a) [1,2 ponto] Encontre uma expressão para v/c, onde v é o módulo da velocidade de um próton no LHC quando sua energia cinética é K em termos de c, da massa m de repouso do próton e de K.

(b)[0,8 ponto] Para $K = 7\,\text{TeV} = 7,0 \times 10^{12}\,\text{eV}$ encontre a massa relativística do próton (m_{rel}) em termos de sua massa de repouso m.

Resolução:

(a) A energia do próton é dada por:

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}c^2 = K + mc^2. \tag{1}$$

Isolando v^2/c^2 na expressão acima encontramos:

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m^2c^4}{(K+mc^2)^2}. \tag{2}$$

Após algumas manipulações matemáticas, encontra-se parra $(v/c)^2$ a expressão seguinte:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{K^2 + 2Kmc^2}{(K+mc^2)^2}. \tag{3}$$

Assim:

$$\boxed{\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{(1+\frac{2mc^2}{K})}}{1+\frac{mc^2}{K}}.} \tag{4}$$

(b) Da Equação (1) encontramos que:

$$m_{rel} = m\left(1 + \frac{K}{mc^2}\right). \tag{5}$$

Do formulário obtemos para o próton $mc^2 = 1000\,\text{MeV}$, substituindo na Equação (5):

$$m_{rel} = m\left(1 + \frac{7\times 10^{12}\,\text{eV}}{1000\times 10^6\,\text{eV}}\right), \tag{6}$$

$$\boxed{m_{rel} = 7001m.} \tag{7}$$

■

2. [3,2 pontos]
Uma partícula de massa m encontra-se confinada em uma caixa unidimensional descrita pela região $0 \leq x \leq 2L$. A energia potencial da partícula é $U(x) = 0$ para pontos no interior da caixa e $U(x) = \infty$ para pontos fora da caixa. Responda às questões que seguem, tendo em conta que RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

(a) [1,2 ponto] Utilizando a equação de Schrödinger independente do tempo determine os níveis de energia E_n da partícula na caixa.

(b) [0,4 ponto] Qual é a energia do segundo estado excitado do sistema?

(c) [1,2 ponto] Determine a função de onda independente do tempo (normalizada) do estado fundamental.

(d) [0,4 ponto] Se 1000 sistemas idênticos ao descrito acima fossem preparados para estarem no estado fundamental, quantas partículas seriam encontradas entre $x = L/2$ e $x = L/2 + 0,01L$?

Resolução:
(a) Do formulário, temos que a equação de Schrödinger independente do tempo para uma partícula de massa m é dada por:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x), \tag{8}$$

onde $u(x)$ é a função de onda independente do tempo. A função de onda completa sendo dada por:

$$\Psi(x,t) = u(x)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}. \tag{9}$$

Para a partícula numa caixa, na região do interior da caixa $U(x) = 0$ e a função de onda é nula nos contornos, tal que para o caso em questão:

$$u(0) = u(2L) = 0. \tag{10}$$

Assim, a equação diferencial que precisamos resolver é dada por:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}u(x) = 0, \tag{11}$$

com as condições de contorno descritas pela Equação (10). Essa é a equação do oscilador harmônico simples, sua solução é dada por:

$$u(x) = A\cos(kx) + B\text{sen}(kx), \tag{12}$$

com A e B constantes e $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. Após aplicar as condições de contorno, encontramos:

$$A = 0, \tag{13}$$

e:

$$k_n = \frac{n\pi}{2L}, \quad n = \{1, 2, 3, 4, ...\}. \tag{14}$$

Assim:

$$\boxed{E_n = \left(\frac{\hbar^2\pi^2}{8mL^2}\right)n^2,} \quad n = \{1, 2, 3, 4, ...\}. \tag{15}$$

(b) O estado fundamental é descrito por $n = 1$, assim o segundo estado excitado é descrito por $n = 3$, e:

$$E_3 = \left(\frac{\hbar^2\pi^2}{8mL^2}\right)3^2, \tag{16}$$

$$\boxed{E_3 = \frac{9\hbar^2\pi^2}{8mL^2}.} \tag{17}$$

(c) A função de onda do estado fundamental é dada por:

$$u_1(x) = B\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right). \tag{18}$$

Pela condição de normalização da função de onda temos:

$$B^2\int_0^{2L} u_1(x)^2 dx = 1, \tag{19}$$

$$B^2\int_0^{2L} \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right) dx = 1. \tag{20}$$

Usando a identidade trigonométrica fornecida no formulário:

$$B^2\int_0^{2L} \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{2L}\right)\right] dx = 1. \tag{21}$$

A integral da função cosseno é nula (soma num período completo), assim:

$$\frac{B^2}{2}2L = 1, \tag{22}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{L}} \tag{23}$$

e:

$$\boxed{u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right).} \tag{24}$$

(d) A probabilidade $P(x)$ de encontrar uma partícula entre x e $x + dx$ no estado fundamental é dada por:

$$P(x) = u_1(x)^2 dx. \tag{25}$$

Assim, para $x = L/2$ e $dx = 0,01L$:

$$P(L/2) = \left[\frac{1}{\sqrt{L}}\text{sen}\left(\frac{\pi(L/2)}{2L}\right)\right]^2 0,01L. \tag{26}$$

$$P(L/2) = \frac{0,01L}{L}\text{sen}^2(\pi/4) = 0,005. \tag{27}$$

Assim, $0,5\%$ das partículas serão encontradas entre $x = L/2$ e $x = L/2 + 0,01L$, ou seja, 5 partículas.

■

3.