Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Física IV-A – 2024/1 – P2- 28/06/2024
VERSÃO: $\boxed{\text{A}}$

Formulário

CONSTANTES NUMÉRICAS

$\mu_0 = 1\times10^{-6}$ H/m; $\varepsilon_0 = (1/9)\times10^{-10}$ F/m; $c = 3\times10^8$ m/s; $h = 6\times10^{-34}$ J $\cdot$ s; $h = 3\times10^{-15}$ eV$\cdot$ s; $\hbar = h/(2\pi)$; $hc = 900$ eV$\cdot$ nm; $e = 2\times10^{-19}$ C; 1 eV $= 2\times10^{-19}$ J; 1 J $= 5\times10^{18}$ eV; $m_pc^2 = 1000$ MeV; $m_ec^2 = 0{,}5$ MeV; $m_e = 10^{-30}$ kg; 1μm $= 10^{-6}$ m; 1 nm $= 10^{-9}$ m; 1 Å $= 10^{-10}$ m; 1 pm $= 10^{-12}$ m; 1 GeV $= 10^3$ MeV $= 10^9$ eV; $\lambda_c = 1{,}8$ pm; $E_1 = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = -25$ eV; $a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = (9/\pi)\times10^{-11}$ m; $\text{sen}(30^\circ) = 1/2$; $\text{sen}(45^\circ) = \sqrt{2}/2$; $\text{sen}(60^\circ) = \sqrt{3}/2$; $\text{sen}^2(\theta) = [1-\cos(2\theta)]/2$.

FORMULÁRIO GERAL

$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$; $\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$; $E = K + m_0c^2 = \gamma m_0c^2$; $p = \gamma m_0 u$; $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$; $x = \gamma(x' + ut')$; $t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$; $v_x = \frac{v_x' + u}{1+(v_x'u)/c^2}$; $v_y = \frac{v_y'}{\gamma(1+(v_x'u)/c^2)}$; $p_x = \gamma(p_x' + uE'/c^2)$, $E = \gamma(E' + up_x')$, $p_y = p_y'$; $\lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{h}{mc}\right)(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta)$; $f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$; $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$; $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$; $L_n = n\hbar$; $r_n = n^2 a_0$; $v_n = e^2/(2n\epsilon_0 h)$; $E_n = \frac{E_1}{n^2}$; $E_n = n^2h^2/(8mL^2)$; $eV_0 = hf - \phi$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x)$; $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$; $k_2 = \sqrt{2m|E-V|}/\hbar$; $R = (\sqrt{E} - \sqrt{E-V})^2/(\sqrt{E} + \sqrt{E-V})^2$; $T = 1 - R$; $\langle x\rangle = (2k_2)^{-1} = \hbar/\sqrt{8m(E-V)}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(E-V)})\text{sen}^2(k_2L)]^{-1}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(V-E)})\text{senh}^2(k_2L)]^{-1}$, $T \simeq \frac{16E(V-E)}{V^2}\exp[-\sqrt{8m(V-E)}L/\hbar]$.

Seção 1. Questões objetivas (6×0,7 = 4,2 pontos)

1. Uma nave espacial que se afasta da Terra com velocidade de $0,80c$ dispara um míssil na direção e sentido de seu movimento. A velocidade do míssil é $0,60c$ relativamente à nave. Qual é o módulo da velocidade v_m do míssil medida por um observador na Terra?

   (a) $0,6c \leq v_m < 0,7c$
   (b) $0,7c \leq v_m < 0,8c$
   (c) $0,5c \leq v_m < 0,6c$
   (d) $0,9c \leq v_m < c$
   (e) $0,8c \leq v_m < 0,9c$

2. De acordo com o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, os comprimentos de onda dos fótons emitidos são determinados pelos saltos quânticos dos elétrons em suas órbitas estacionárias. Sendo $n_f = l$ e $n_i = u$ os níveis quânticos dos estados final e inicial do elétron, respectivamente, qual é o comprimento de onda do fóton emitido com energia máxima na série de Balmer ($l = 2$)? (E_1 é energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio).

   (a) $4hc/|E_1|$
   (b) $9hc/|E_1|$
   (c) $16hc/|E_1|$
   (d) $2hc/|E_1|$
   (e) $3hc/|E_1|$

3. Num acelerador de partículas, um elétron é acelerado até atingir a energia cinética de $9E_0$, onde $E_0 = m_ec^2$ é a energia de repouso do elétron. O módulo da velocidade v_e do elétron, em termos da velocidade da luz é dado por:

   (a) $0,80c \leq v_e < 0,85c$
   (b) $0,95c \leq v_e < c$.
   (c) $0,85c \leq v_e < 0,90c$
   (d) $0,90c \leq v_e < 0,95c$
   (e) $0,75c \leq v_e < 0,80c$

4. Uma fonte de radiação eletromagnética move-se na direção radial em relação a você. A frequência que você mede para a radiação é $3/2$ vezes a frequência medida no referencial de repouso da fonte. A fonte está se aproximando ou afastando de você? Qual o valor da velocidade v_f da fonte?

   (a) aproximando tal que $0,1c \leq v_f < 0,3c$
   (b) aproximando tal que $0,5c \leq v_f < 0,7c$
   (c) aproximando tal que $0,3c \leq v_f < 0,5c$
   (d) afastando tal que $0,1c \leq v_f < 0,3c$
   (e) afastando tal que $0,5c \leq v_f < 0,7c$
   (f) afastando tal que $0,3c \leq v_f < 0,5c$

5. Um feixe de raios X com frequência igual a $1,5 \times 10^{19}$ Hz é espalhado por elétrons que podem ser considerados em repouso num alvo de carbono. O feixe espalhado é detectado num ângulo de 60^o em relação ao feixe incidente. Qual das alternativas abaixo corresponde à porcentagem da energia do fóton incidente que é transferida para o elétron?

   (a) entre 10% e 20%
   (b) entre 30% e 40%
   (c) entre 40% e 50%
   (d) entre 20% e 30%
   (e) < 10%

6. A luz solar pode ejetar elétrons da superfície de um satélite em órbita, carregando-o. Os projetistas de satélites procuram minimizar esse efeito através de revestimentos especiais. Suponha que um satélite seja revestido de platina, um metal com uma função trabalho muito elevada ($\phi = 8,5 \times 10^{-19}$ J). Qual é o maior comprimento de onda da luz solar que é capaz de ejetar elétrons de uma superfície revestida com platina?

   (a) entre 100nm e 200nm
   (b) entre 200nm e 300nm
   (c) entre 300nm e 400nm
   (d) entre 400nm e 500nm
   (e) entre 500nm e 600nm

Seção 2. Questões VF ($2 \times 0{,}8 = 1{,}6$ pontos). Questões discursivas ($1\times$ 1,6 + $1\times$ 2,6 = 4,2)

1. [1,6 pontos] Avalie as afirmativas abaixo e diga se são verdadeiras V, ou falsas F. Todas as respostas devem apresentar justificativas.

   [(a)] [0,8 ponto] Um observador na Terra verifica que uma régua que se move em relação a ele faz um ângulo de 30^o com a horizontal (eixo x). Se a régua se move na direção vertical (eixo y) com velocidade $3c/5$, para um observador no referencial da régua o ângulo que ela faz com a horizontal é maior que 30^o.

   [(b)] [0,8 ponto] No efeito fotoelétrico define-se o potencial de corte, V_0, como o módulo do potencial entre o anodo e o catodo capaz de impedir que os elétrons mais energéticos sejam ejetados. V_0 depende linearmente da intensidade da luz incidente.

2. [1,6 pontos]
   Dois prótons, cada um com uma massa de repouso m_p, estão se deslocando inicialmente com velocidades de mesmo módulo e em sentidos opostos. Após colidirem, os prótons continuam a existir e uma partícula η_0 é criada. A massa de repouso da nova partícula é $m_{\eta 0} = m_p/2$. Se os dois prótons e a partícula η_0 encontram-se em repouso após a colisão, encontre em função dos dados da questão:

   (a) [0,8 ponto] Qual é o módulo do momento inicial P de cada próton?

   (b)[0,8 ponto] Qual é a razão r entre a energia da partícula η_0 e a energia inicial dos dois prótons?

3. [2,6 pontos]
   Considere uma partícula de massa m confinada em uma caixa infinita de lado L. Dentro da caixa, $0 < x < L$, a energia potencial é nula. Fora dos limites da caixa a energia potencial é infinita.

   (a) [0,4 ponto] Quais são os valores da função de onda independente no tempo, $u(x)$, em $x = 0$ e em $x = L$?

   (b) [1,2 ponto] Encontre a função de onda independente do tempo, $u_n(x)$, normalizada para o estado de energia de ordem n da caixa, $n = \{1, 2, 3, ...\}$.

   (c) [0,4 ponto] Quais os valores permitidos para o comprimento de onda, λ_n, da partícula na caixa?

   (d) [0,6 ponto] Considere que a partícula na caixa se encontra no primeiro estado excitado de energia. Qual é a probabilidade, P, dela ser encontrada na região $0 < x < L/2$?

Gabarito para Versão $\boxed{\text{A}}$

Seção 1. Questões objetivas (6×0,7 = 4,2 pontos)

1. (d)
2. (a)
3. (b)
4. (c)
5. (e)
6. (b)

Seção 2. Questões VF (2×0,8 = 1,6 pontos). Questões discursivas (1× 1,6 + 1× 2,6 = 4,2)

1. **Resolução:**

(a) A afirmativa é V. Vamos denominar θ o ângulo formado pela régua e o eixo x. Para o observador na Terra:

$$\tan(\theta) = \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}.$$

Para um observador no referencial de movimento da régua:

$$\tan(\theta') = \frac{\Delta \mathrm{y}'}{\Delta \mathrm{x}'}.$$

Como a régua se move na vertical, Δy do observador na Terra é contraído em relação a $\Delta y'$, e os comprimentos horizontais não se alteram, ou seja:

$$\Delta y' = \gamma \Delta y,$$

e:

$$\Delta x' = \Delta x,$$

tal que:

$$\tan(\theta') = \gamma \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}},$$

$$\tan(\theta') = \gamma \tan(\theta),$$

Como o fator de Lorentz $\gamma > 1$, $\theta' > \theta$.

(b) A afirmativa é F. No efeito fotoelétrico, o potencial de corte é dado por:

$$V_0 = \frac{h}{e} f - \frac{\phi}{e},$$

ou seja, depende linearmente da frequência e não da intensidade da radiação incidente.

■

2. **Resolução:**

.

(a) Pela conservação da energia temos:

$$2\sqrt{P^2c^2 + m_p^2c^4} = 2m_pc^2 + \frac{m_p}{2}c^2$$

Resolvendo a equação acima para P, encontramos:

$$P = \frac{3}{4} m_p c.$$

(b) Temos que:

$$r = \frac{\frac{m_p}{2} c^2}{2 m_p c^2 + \frac{m_p}{2} c^2},$$

$$r = \frac{1}{5}.$$

■

3. **Resolução:**

(a) Temos que:

$$u(0) = u(L) = 0,$$

porque a probabilidade de encontrar a partícula fora da caixa é nula.

(b) Temos para a região $0 < x < L$, que a energia potencial é nula, assim:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = E u(x),$$

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -\left(\frac{2mE}{\hbar^2} \right) u(x).$$

A solução da equação diferencial acima é dada por:

$$u(x) = A\mathrm{sen(kx)} + \mathrm{Bcos(kx)}.$$

Derivando a expressão acima duas vezes em relação a x encontramos:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -k^2 u(x),$$

e $k = 2mE/\hbar^2$.

Assim, para $u(0) = 0$ encontramos:

$$u(0) = A\mathrm{sen(0)} + \mathrm{Bcos(0)} = 0,$$

o que para ser satisfeita precisa ter $B = 0$.

Para $u(L) = 0$, temos:

$$A\mathrm{sen(kL)} = 0,$$

A não pode ser nulo, pois teríamos a solução identicamente nula. Logo:

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = \{1, 2, 3, ...\}.$$

A função de onda então é dada por:

$$u_n(x) = A\mathrm{sen(n\pi x/L)}.$$

Pela condição de normalização da função de onda devemos ter:

$$\int_0^L u_n^2(x) dx = 1,$$

$$\int_0^L A^2 \mathrm{sen}^2\mathrm{(n\pi x/L)dx} = 1,$$

$$\int_0^L \frac{A^2}{2} \mathrm{[1 - \cos(2n\pi x/L)]dx} = 1,$$

a integral em cosseno acima é realizada em n períodos completos, é nula. Assim:

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

e:

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \mathrm{sen(n\pi x/L)}.$$

(c) Temos:

$$k_n = \frac{n\pi}{L},$$

e $k_n = 2\pi/\lambda_n$,

assim:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = \{1, 2, 3, ...\}.$$

(d) Temos que:

$$P = \int_0^{L/2} u_2^2(x) dx,$$

$$P = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \mathrm{sen}^2\mathrm{(2\pi x/L)dx},$$

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2\mathrm{(v)dv}.$$

$$P = \frac{1}{2}.$$

■

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Física IV-A – 2024/1 – P2- 28/06/2024
VERSÃO: $\boxed{\text{B}}$

Formulário

CONSTANTES NUMÉRICAS

$\mu_0 = 1\times10^{-6}$ H/m; $\varepsilon_0 = (1/9)\times10^{-10}$ F/m; $c = 3\times10^8$ m/s; $h = 6\times10^{-34}$ J · s; $h = 3\times10^{-15}$ eV· s; $\hbar = h/(2\pi)$; $hc = 900$ eV· nm; $e = 2\times10^{-19}$ C; 1 eV $= 2\times10^{-19}$ J; 1 J $= 5\times10^{18}$ eV; $m_pc^2 = 1000$ MeV; $m_ec^2 = 0{,}5$ MeV; $m_e = 10^{-30}$ kg; 1μm $= 10^{-6}$ m; 1 nm $= 10^{-9}$ m; 1 Å $= 10^{-10}$ m; 1 pm $= 10^{-12}$ m; 1 GeV $= 10^3$ MeV $= 10^9$ eV; $\lambda_c = 1{,}8$ pm; $E_1 = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = -25$ eV; $a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = (9/\pi)\times10^{-11}$ m; $\text{sen}(30^\circ) = 1/2$; $\text{sen}(45^\circ) = \sqrt{2}/2$; $\text{sen}(60^\circ) = \sqrt{3}/2$; $\text{sen}^2(\theta) = [1-\cos(2\theta)]/2$.

FORMULÁRIO GERAL

$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$; $\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$; $E = K + m_0c^2 = \gamma m_0 c^2$; $p = \gamma m_0 u$; $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$; $x = \gamma(x' + ut')$; $t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$; $v_x = \frac{v'_x + u}{1+(v'_x u)/c^2}$; $v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1+(v'_x u)/c^2)}$; $p_x = \gamma(p'_x + uE'/c^2)$, $E = \gamma(E' + up'_x)$, $p_y = p'_y$; $\lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{h}{mc}\right)(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta)$; $f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$; $\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$; $\Delta E\cdot\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$; $L_n = n\hbar$; $r_n = n^2 a_0$; $v_n = e^2/(2n\epsilon_0 h)$; $E_n = \frac{E_1}{n^2}$; $E_n = n^2h^2/(8mL^2)$; $eV_0 = hf - \phi$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x)$; $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$; $k_2 = \sqrt{2m|E-V|}/\hbar$; $R = (\sqrt{E}-\sqrt{E-V})^2/(\sqrt{E}+\sqrt{E-V})^2$; $T = 1-R$; $\langle x\rangle = (2k_2)^{-1} = \hbar/\sqrt{8m(E-V)}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(E-V)})\text{sen}^2(k_2L)]^{-1}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(V-E)})\text{senh}^2(k_2L)]^{-1}$, $T \simeq \frac{16E(V-E)}{V^2}\exp[-\sqrt{8m(V-E)}L/\hbar]$.

Seção 1. Questões objetivas (6×0,7 = 4,2 pontos)

1. A luz solar pode ejetar elétrons da superfície de um satélite em órbita, carregando-o. Os projetistas de satélites procuram minimizar esse efeito através de revestimentos especiais. Suponha que um satélite seja revestido de platina, um metal com uma função trabalho muito elevada ($\phi = 8,5\times10^{-19}$ J). Qual é o maior comprimento de onda da luz solar que é capaz de ejetar elétrons de uma superfície revestida com platina?

   (a) entre 100nm e 200nm
   (b) entre 200nm e 300nm
   (c) entre 300nm e 400nm
   (d) entre 400nm e 500nm
   (e) entre 500nm e 600nm

2. De acordo com o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, os comprimentos de onda dos fótons emitidos são determinados pelos saltos quânticos dos elétrons em suas órbitas estacionárias. Sendo $n_f = l$ e $n_i = u$ os níveis quânticos dos estados final e inicial do elétron, respectivamente, qual é o comprimento de onda do fóton emitido com energia máxima na série de Balmer ($l = 2$)? (E_1 é energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio).

   (a) $4hc/|E_1|$
   (b) $9hc/|E_1|$
   (c) $16hc/|E_1|$
   (d) $2hc/|E_1|$
   (e) $3hc/|E_1|$

3. Uma fonte de radiação eletromagnética move-se na direção radial em relação a você. A frequência que você mede para a radiação é $3/2$ vezes a frequência medida no referencial de repouso da fonte. A fonte está se aproximando ou afastando de você? Qual o valor da velocidade v_f da fonte?

   (a) aproximando tal que $0,1c \leq v_f < 0,3c$
   (b) aproximando tal que $0,5c \leq v_f < 0,7c$
   (c) aproximando tal que $0,3c \leq v_f < 0,5c$
   (d) afastando tal que $0,1c \leq v_f < 0,3c$
   (e) afastando tal que $0,5c \leq v_f < 0,7c$
   (f) afastando tal que $0,3c \leq v_f < 0,5c$

4. Um feixe de raios X com frequência igual a $1,5 \times 10^{19}$ Hz é espalhado por elétrons que podem ser considerados em repouso num alvo de carbono. O feixe espalhado é detectado num ângulo de 60^o em relação ao feixe incidente. Qual das alternativas abaixo corresponde à porcentagem da energia do fóton incidente que é transferida para o elétron?

   (a) entre 10% e 20%
   (b) entre 30% e 40%
   (c) entre 40% e 50%
   (d) entre 20% e 30%
   (e) $< 10\%$

5. Uma nave espacial que se afasta da Terra com velocidade de $0,80c$ dispara um míssil na direção e sentido de seu movimento. A velocidade do míssil é $0,60c$ relativamente à nave. Qual é o módulo da velocidade v_m do míssil medida por um observador na Terra?

   (a) $0,6c \leq v_m < 0,7c$
   (b) $0,7c \leq v_m < 0,8c$
   (c) $0,5c \leq v_m < 0,6c$
   (d) $0,9c \leq v_m < c$
   (e) $0,8c \leq v_m < 0,9c$

6. Num acelerador de partículas, um elétron é acelerado até atingir a energia cinética de $9E_0$, onde $E_0 = m_e c^2$ é a energia de repouso do elétron. O módulo da velocidade v_e do elétron, em termos da velocidade da luz é dado por:

   (a) $0,80c \leq v_e < 0,85c$
   (b) $0,95c \leq v_e < c.$
   (c) $0,85c \leq v_e < 0,90c$
   (d) $0,90c \leq v_e < 0,95c$
   (e) $0,75c \leq v_e < 0,80c$

Seção 2. Questões VF (2×0,8 = 1,6 pontos). Questões discursivas (1× 1,6 + 1× 2,6 = 4,2)

1. [1,6 pontos] Avalie as afirmativas abaixo e diga se são verdadeiras V, ou falsas F. Todas as respostas devem apresentar justificativas.

   [(a)] [0,8 ponto] Um observador na Terra verifica que uma régua que se move em relação a ele faz um ângulo de 30^o com a horizontal (eixo x). Se a régua se move na direção vertical (eixo y) com velocidade $3c/5$, para um observador no referencial da régua o ângulo que ela faz com a horizontal é maior que 30^o.

   [(b)] [0,8 ponto] No efeito fotoelétrico define-se o potencial de corte, V_0, como o módulo do potencial entre o anodo e o catodo capaz de impedir que os elétrons mais energéticos sejam ejetados. V_0 depende linearmente da intensidade da luz incidente.

2. [1,6 pontos]
   Dois prótons, cada um com uma massa de repouso m_p, estão se deslocando inicialmente com velocidades de mesmo módulo e em sentidos opostos. Após colidirem, os prótons continuam a existir e uma partícula η_0 é criada. A massa de repouso da nova partícula é $m_{\eta 0} = m_p/2$. Se os dois prótons e a partícula η_0 encontram-se em repouso após a colisão, encontre em função dos dados da questão:

   (a) [0,8 ponto] Qual é o módulo do momento inicial P de cada próton?

   (b)[0,8 ponto] Qual é a razão r entre a energia da partícula η_0 e a energia inicial dos dois prótons?

3. [2,6 pontos]
   Considere uma partícula de massa m confinada em uma caixa infinita de lado L. Dentro da caixa, $0 < x < L$, a energia potencial é nula. Fora dos limites da caixa a energia potencial é infinita.

   (a) [0,4 ponto] Quais são os valores da função de onda independente no tempo, $u(x)$, em $x = 0$ e em $x = L$?

   (b) [1,2 ponto] Encontre a função de onda independente do tempo, $u_n(x)$, normalizada para o estado de energia de ordem n da caixa, $n = \{1, 2, 3, ...\}$.

   (c) [0,4 ponto] Quais os valores permitidos para o comprimento de onda, λ_n, da partícula na caixa?

   (d) [0,6 ponto] Considere que a partícula na caixa se encontra no primeiro estado excitado de energia. Qual é a probabilidade, P, dela ser encontrada na região $0 < x < L/2$?

Gabarito para Versão $\boxed{\text{B}}$

Seção 1. Questões objetivas (6×0,7 = 4,2 pontos)

1. (b)
2. (a)
3. (c)
4. (e)
5. (d)
6. (b)

Seção 2. Questões VF (2×0,8 = 1,6 pontos). Questões discursivas (1× 1,6 + 1× 2,6 = 4,2)

1. **Resolução:**

(a) A afirmativa é V. Vamos denominar θ o ângulo formado pela régua e o eixo x. Para o observador na Terra:

$$\tan(\theta) = \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}.$$

Para um observador no referencial de movimento da régua:

$$\tan(\theta') = \frac{\Delta \mathrm{y}'}{\Delta \mathrm{x}'}.$$

Como a régua se move na vertical, Δy do observador na Terra é contraído em relação a $\Delta y'$, e os comprimentos horizontais não se alteram, ou seja:

$$\Delta y' = \gamma \Delta y,$$

e:

$$\Delta x' = \Delta x,$$

tal que:

$$\tan(\theta') = \gamma \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}},$$

$$\tan(\theta') = \gamma \tan(\theta),$$

Como o fator de Lorentz $\gamma > 1$, $\theta' > \theta$.

(b) A afirmativa é F. No efeito fotoelétrico, o potencial de corte é dado por:

$$V_0 = \frac{h}{e} f - \frac{\phi}{e},$$

ou seja, depende linearmente da frequência e não da intensidade da radiação incidente.

■

2. **Resolução:**

.

(a) Pela conservação da energia temos:

$$2\sqrt{P^2c^2 + m_p^2c^4} = 2m_pc^2 + \frac{m_p}{2}c^2$$

Resolvendo a equação acima para P, encontramos:

$$P = \frac{3}{4} m_p c.$$

(b) Temos que:

$$r = \frac{\frac{m_p}{2} c^2}{2m_p c^2 + \frac{m_p}{2} c^2},$$

$$r = \frac{1}{5}.$$

■

3. **Resolução:**

(a) Temos que:

$$u(0) = u(L) = 0,$$

porque a probabilidade de encontrar a partícula fora da caixa é nula.

(b) Temos para a região $0 < x < L$, que a energia potencial é nula, assim:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} = Eu(x),$$

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)u(x).$$

A solução da equação diferencial acima é dada por:

$$u(x) = A\mathrm{sen(kx)} + \mathrm{Bcos(kx)}.$$

Derivando a expressão acima duas vezes em relação a x encontramos:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -k^2 u(x),$$

e $k = 2mE/\hbar^2$.

Assim, para $u(0) = 0$ encontramos:

$$u(0) = A\mathrm{sen(0)} + \mathrm{Bcos(0)} = 0,$$

o que para ser satisfeita precisa ter $B = 0$.

Para $u(L) = 0$, temos:

$$A\mathrm{sen(kL)} = 0,$$

A não pode ser nulo, pois teríamos a solução identicamente nula. Logo:

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = \{1, 2, 3, ...\}.$$

A função de onda então é dada por:

$$u_n(x) = A\mathrm{sen(n\pi x/L)}.$$

Pela condição de normalização da função de onda devemos ter:

$$\int_0^L u_n^2(x)dx = 1,$$

$$\int_0^L A^2\mathrm{sen^2(n\pi x/L)dx} = 1,$$

$$\int_0^L \frac{A^2}{2}\left[1 - \mathrm{cos(2n\pi x/L)}\right]\mathrm{dx} = 1,$$

a integral em cosseno acima é realizada em n períodos completos, é nula. Assim:

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

e:

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\mathrm{sen(n\pi x/L)}.$$

(c) Temos:

$$k_n = \frac{n\pi}{L},$$

e $k_n = 2\pi/\lambda_n$,

assim:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = \{1, 2, 3, ...\}.$$

(d) Temos que:

$$P = \int_0^{L/2} u_2^2(x)dx,$$

$$P = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} \mathrm{sen^2(2\pi x/L)dx},$$

$$P = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{sen^2(v)dv}.$$

$$P = \frac{1}{2}.$$

■

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Física IV-A – 2024/1 – P2- 28/06/2024
VERSÃO: C

Formulário

CONSTANTES NUMÉRICAS

$\mu_0 = 1\times10^{-6}$ H/m; $\varepsilon_0 = (1/9)\times10^{-10}$ F/m; $c = 3\times10^8$ m/s; $h = 6\times10^{-34}$ J · s; $h = 3\times10^{-15}$ eV· s; $\hbar = h/(2\pi)$; $hc = 900$ eV· nm; $e = 2\times10^{-19}$ C; 1 eV $= 2\times10^{-19}$ J; 1 J $= 5\times10^{18}$ eV; $m_pc^2 = 1000$ MeV; $m_ec^2 = 0{,}5$ MeV; $m_e = 10^{-30}$ kg; 1μm $= 10^{-6}$ m; 1 nm $= 10^{-9}$ m; 1 Å $= 10^{-10}$ m; 1 pm $= 10^{-12}$ m; 1 GeV $= 10^3$ MeV $= 10^9$ eV; $\lambda_c = 1{,}8$ pm; $E_1 = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = -25$ eV; $a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = (9/\pi)\times10^{-11}$ m; $\mathrm{sen}(30^\circ) = 1/2$; $\mathrm{sen}(45^\circ) = \sqrt{2}/2$; $\mathrm{sen}(60^\circ) = \sqrt{3}/2$; $\mathrm{sen}^2(\theta) = [1-\cos(2\theta)]/2$.

FORMULÁRIO GERAL

$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$; $\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$; $E = K + m_0c^2 = \gamma m_0c^2$; $p = \gamma m_0 u$; $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$; $x = \gamma(x' + ut')$; $t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$; $v_x = \frac{v_x' + u}{1 + (v_x'u)/c^2}$; $v_y = \frac{v_y'}{\gamma(1+(v_x'u)/c^2)}$; $p_x = \gamma(p_x' + uE'/c^2)$, $E = \gamma(E' + up_x')$, $p_y = p_y'$; $\lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{h}{mc}\right)(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta)$; $f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$; $\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$; $\Delta E\cdot\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$; $L_n = n\hbar$; $r_n = n^2 a_0$; $v_n = e^2/(2n\epsilon_0 h)$; $E_n = \frac{E_1}{n^2}$; $E_n = n^2h^2/(8mL^2)$; $eV_0 = hf - \phi$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x)$; $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$; $k_2 = \sqrt{2m|E-V|}/\hbar$; $R = (\sqrt{E} - \sqrt{E-V})^2/(\sqrt{E} + \sqrt{E-V})^2$; $T = 1 - R$; $\langle x\rangle = (2k_2)^{-1} = \hbar/\sqrt{8m(E-V)}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(E-V)})\mathrm{sen}^2(k_2L)]^{-1}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(V-E)})\mathrm{senh}^2(k_2L)]^{-1}$, $T \simeq \frac{16E(V-E)}{V^2}\exp[-\sqrt{8m(V-E)}L/\hbar]$.

Seção 1. Questões objetivas (6×0,7 = 4,2 pontos)

1. Um feixe de raios X com frequência igual a $1,5\times10^{19}$ Hz é espalhado por elétrons que podem ser considerados em repouso num alvo de carbono. O feixe espalhado é detectado num ângulo de 60^o em relação ao feixe incidente. Qual das alternativas abaixo corresponde à porcentagem da energia do fóton incidente que é transferida para o elétron?

   (a) entre 10% e 20%
   (b) entre 30% e 40%
   (c) entre 40% e 50%
   (d) entre 20% e 30%
   (e) < 10%

2. Uma nave espacial que se afasta da Terra com velocidade de $0,80c$ dispara um míssil na direção e sentido de seu movimento. A velocidade do míssil é $0,60c$ relativamente à nave. Qual é o módulo da velocidade v_m do míssil medida por um observador na Terra?

   (a) $0,6c \leq v_m < 0,7c$
   (b) $0,7c \leq v_m < 0,8c$
   (c) $0,5c \leq v_m < 0,6c$
   (d) $0,9c \leq v_m < c$
   (e) $0,8c \leq v_m < 0,9c$

3. A luz solar pode ejetar elétrons da superfície de um satélite em órbita, carregando-o. Os projetistas de satélites procuram minimizar esse efeito através de revestimentos especiais. Suponha que um satélite seja revestido de platina, um metal com uma função trabalho muito elevada ($\phi = 8,5\times10^{-19}$ J). Qual é o maior comprimento de onda da luz solar que é capaz de ejetar elétrons de uma superfície revestida com platina?

   (a) entre 100nm e 200nm
   (b) entre 200nm e 300nm
   (c) entre 300nm e 400nm
   (d) entre 400nm e 500nm
   (e) entre 500nm e 600nm

4. Uma fonte de radiação eletromagnética move-se na direção radial em relação a você. A frequência que você mede para a radiação é $3/2$ vezes a frequência medida no referencial de repouso da fonte. A fonte está se aproximando ou afastando de você? Qual o valor da velocidade v_f da fonte?

    (a) aproximando tal que $0,1c \leq v_f < 0,3c$
    (b) aproximando tal que $0,5c \leq v_f < 0,7c$
    (c) aproximando tal que $0,3c \leq v_f < 0,5c$
    (d) afastando tal que $0,1c \leq v_f < 0,3c$
    (e) afastando tal que $0,5c \leq v_f < 0,7c$
    (f) afastando tal que $0,3c \leq v_f < 0,5c$

5. De acordo com o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, os comprimentos de onda dos fótons emitidos são determinados pelos saltos quânticos dos elétrons em suas órbitas estacionárias. Sendo $n_f = l$ e $n_i = u$ os níveis quânticos dos estados final e inicial do elétron, respectivamente, qual é o comprimento de onda do fóton emitido com energia máxima na série de Balmer ($l = 2$)? (E_1 é energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio).

    (a) $4hc/|E_1|$
    (b) $9hc/|E_1|$
    (c) $16hc/|E_1|$
    (d) $2hc/|E_1|$
    (e) $3hc/|E_1|$

6. Num acelerador de partículas, um elétron é acelerado até atingir a energia cinética de $9E_0$, onde $E_0 = m_e c^2$ é a energia de repouso do elétron. O módulo da velocidade v_e do elétron, em termos da velocidade da luz é dado por:

    (a) $0,80c \leq v_e < 0,85c$
    (b) $0,95c \leq v_e < c$.
    (c) $0,85c \leq v_e < 0,90c$
    (d) $0,90c \leq v_e < 0,95c$
    (e) $0,75c \leq v_e < 0,80c$

Seção 2. Questões VF (2×0,8 = 1,6 pontos). Questões discursivas (1× 1,6 + 1× 2,6 = 4,2)

1. [1,6 pontos] Avalie as afirmativas abaixo e diga se são verdadeiras V, ou falsas F. Todas as respostas devem apresentar justificativas.

   [(a)] [0,8 ponto] Um observador na Terra verifica que uma régua que se move em relação a ele faz um ângulo de 30^o com a horizontal (eixo x). Se a régua se move na direção vertical (eixo y) com velocidade $3c/5$, para um observador no referencial da régua o ângulo que ela faz com a horizontal é maior que 30^o.

   [(b)] [0,8 ponto] No efeito fotoelétrico define-se o potencial de corte, V_0, como o módulo do potencial entre o anodo e o catodo capaz de impedir que os elétrons mais energéticos sejam ejetados. V_0 depende linearmente da intensidade da luz incidente.

2. [1,6 pontos]
   Dois prótons, cada um com uma massa de repouso m_p, estão se deslocando inicialmente com velocidades de mesmo módulo e em sentidos opostos. Após colidirem, os prótons continuam a existir e uma partícula η_0 é criada. A massa de repouso da nova partícula é $m_{\eta 0} = m_p/2$. Se os dois prótons e a partícula η_0 encontram-se em repouso após a colisão, encontre em função dos dados da questão:

   (a) [0,8 ponto] Qual é o módulo do momento inicial P de cada próton?

   (b)[0,8 ponto] Qual é a razão r entre a energia da partícula η_0 e a energia inicial dos dois prótons?

3. [2,6 pontos]
   Considere uma partícula de massa m confinada em uma caixa infinita de lado L. Dentro da caixa, $0 < x < L$, a energia potencial é nula. Fora dos limites da caixa a energia potencial é infinita.

   (a) [0,4 ponto] Quais são os valores da função de onda independente no tempo, $u(x)$, em $x = 0$ e em $x = L$?

   (b) [1,2 ponto] Encontre a função de onda independente do tempo, $u_n(x)$, normalizada para o estado de energia de ordem n da caixa, $n = \{1, 2, 3, ...\}$.

   (c) [0,4 ponto] Quais os valores permitidos para o comprimento de onda, λ_n, da partícula na caixa?

   (d) [0,6 ponto] Considere que a partícula na caixa se encontra no primeiro estado excitado de energia. Qual é a probabilidade, P, dela ser encontrada na região $0 < x < L/2$?

Gabarito para Versão $\boxed{\text{C}}$

Seção 1. Questões objetivas (6×0,7 = 4,2 pontos)

1. (e)

2. (d)

3. (b)

4. (c)

5. (a)

6. (b)

Seção 2. Questões VF (2×0,8 = 1,6 pontos). Questões discursivas (1× 1,6 + 1× 2,6 = 4,2)

1. **Resolução:**

(a) A afirmativa é V. Vamos denominar θ o ângulo formado pela régua e o eixo x. Para o observador na Terra:

$$\tan(\theta) = \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}.$$

Para um observador no referencial de movimento da régua:

$$\tan(\theta') = \frac{\Delta \mathrm{y}'}{\Delta \mathrm{x}'}.$$

Como a régua se move na vertical, Δy do observador na Terra é contraído em relação a $\Delta y'$, e os comprimentos horizontais não se alteram, ou seja:

$$\Delta y' = \gamma \Delta y,$$

e:

$$\Delta x' = \Delta x,$$

tal que:

$$\tan(\theta') = \gamma \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}},$$

$$\tan(\theta') = \gamma \tan(\theta),$$

Como o fator de Lorentz $\gamma > 1$, $\theta' > \theta$.

(b) A afirmativa é F. No efeito fotoelétrico, o potencial de corte é dado por:

$$V_0 = \frac{h}{e} f - \frac{\phi}{e},$$

ou seja, depende linearmente da frequência e não da intensidade da radiação incidente.

■

2. **Resolução:**

.

(a) Pela conservação da energia temos:

$$2\sqrt{P^2c^2 + m_p^2c^4} = 2m_pc^2 + \frac{m_p}{2}c^2$$

Resolvendo a equação acima para P, encontramos:

$$P = \frac{3}{4} m_p c.$$

(b) Temos que:

$$r = \frac{\frac{m_p}{2} c^2}{2 m_p c^2 + \frac{m_p}{2} c^2},$$

$$r = \frac{1}{5}.$$

■

3. **Resolução:**

(a) Temos que:

$$u(0) = u(L) = 0,$$

porque a probabilidade de encontrar a partícula fora da caixa é nula.

(b) Temos para a região $0 < x < L$, que a energia potencial é nula, assim:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = E u(x),$$

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right) u(x).$$

A solução da equação diferencial acima é dada por:

$$u(x) = A\mathrm{sen(kx)} + \mathrm{Bcos(kx)}.$$

Derivando a expressão acima duas vezes em relação a x encontramos:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -k^2 u(x),$$

e $k = 2mE/\hbar^2$.

Assim, para $u(0) = 0$ encontramos:

$$u(0) = A\mathrm{sen(0)} + \mathrm{Bcos(0)} = 0,$$

o que para ser satisfeita precisa ter $B = 0$.

Para $u(L) = 0$, temos:

$$A\mathrm{sen(kL)} = 0,$$

A não pode ser nulo, pois teríamos a solução identicamente nula. Logo:

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = \{1, 2, 3, ...\}.$$

A função de onda então é dada por:

$$u_n(x) = A\mathrm{sen(n\pi x/L)}.$$

Pela condição de normalização da função de onda devemos ter:

$$\int_0^L u_n^2(x) dx = 1,$$

$$\int_0^L A^2 \mathrm{sen}^2\mathrm{(n\pi x/L)dx} = 1,$$

$$\int_0^L \frac{A^2}{2} \mathrm{[1 - cos(2n\pi x/L)]dx} = 1,$$

a integral em cosseno acima é realizada em n períodos completos, é nula. Assim:

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

e:

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \mathrm{sen(n\pi x/L)}.$$

(c) Temos:

$$k_n = \frac{n\pi}{L},$$

e $k_n = 2\pi/\lambda_n$,

assim:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = \{1, 2, 3, ...\}.$$

(d) Temos que:

$$P = \int_0^{L/2} u_2^2(x) dx,$$

$$P = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \mathrm{sen}^2\mathrm{(2\pi x/L)dx},$$

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2\mathrm{(v)dv}.$$

$$P = \frac{1}{2}.$$

■

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Física IV-A – 2024/1 – P2- 28/06/2024
VERSÃO: D

<u>Formulário</u>

CONSTANTES NUMÉRICAS

$\mu_0 = 1\times10^{-6}$ H/m; $\varepsilon_0 = (1/9)\times10^{-10}$ F/m; $c = 3\times10^8$ m/s; $h = 6\times10^{-34}$ J $\cdot$ s; $h = 3\times10^{-15}$ eV$\cdot$ s; $\hbar = h/(2\pi)$; $hc = 900$ eV$\cdot$ nm; $e = 2\times10^{-19}$ C; 1 eV $= 2\times10^{-19}$ J; 1 J $= 5\times10^{18}$ eV; $m_pc^2 = 1000$ MeV; $m_ec^2 = 0{,}5$ MeV; $m_e = 10^{-30}$ kg; 1μm $= 10^{-6}$ m; 1 nm $= 10^{-9}$ m; 1 Å $= 10^{-10}$ m; 1 pm $= 10^{-12}$ m; 1 GeV $= 10^3$ MeV $= 10^9$ eV; $\lambda_c = 1{,}8$ pm; $E_1 = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = -25$ eV; $a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = (9/\pi)\times10^{-11}$ m; $\mathrm{sen}(30°) = 1/2$; $\mathrm{sen}(45°) = \sqrt{2}/2$; $\mathrm{sen}(60°) = \sqrt{3}/2$; $\mathrm{sen}^2(\theta) = [1-\cos(2\theta)]/2$.

FORMULÁRIO GERAL

$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$; $\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$; $E = K + m_0c^2 = \gamma m_0c^2$; $p = \gamma m_0 u$; $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$; $x = \gamma(x' + ut')$; $t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$; $v_x = \frac{v_x'+u}{1+(v_x'u)/c^2}$; $v_y = \frac{v_y'}{\gamma(1+(v_x'u)/c^2)}$; $p_x = \gamma(p_x' + uE'/c^2)$, $E = \gamma(E' + up_x')$, $p_y = p_y'$; $\lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{h}{mc}\right)(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta)$; $f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$; $\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$; $\Delta E\cdot\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$; $L_n = n\hbar$; $r_n = n^2a_0$; $v_n = e^2/(2n\epsilon_0 h)$; $E_n = \frac{E_1}{n^2}$; $E_n = n^2h^2/(8mL^2)$; $eV_0 = hf - \phi$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x)$; $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$; $k_2 = \sqrt{2m|E-V|}/\hbar$; $R = (\sqrt{E}-\sqrt{E-V})^2/(\sqrt{E}+\sqrt{E-V})^2$; $T = 1-R$; $\langle x\rangle = (2k_2)^{-1} = \hbar/\sqrt{8m(E-V)}$; $T = [1+(\frac{V^2}{4E(E-V)})\mathrm{sen}^2(k_2L)]^{-1}$; $T = [1+(\frac{V^2}{4E(V-E)})\mathrm{senh}^2(k_2L)]^{-1}$, $T \simeq \frac{16E(V-E)}{V^2}\exp[-\sqrt{8m(V-E)}L/\hbar]$.

Seção 1. Questões objetivas (6×0,7 = 4,2 pontos)

1. De acordo com o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, os comprimentos de onda dos fótons emitidos são determinados pelos saltos quânticos dos elétrons em suas órbitas estacionárias. Sendo $n_f = l$ e $n_i = u$ os níveis quânticos dos estados final e inicial do elétron, respectivamente, qual é o comprimento de onda do fóton emitido com energia máxima na série de Balmer ($l = 2$)? (E_1 é energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio).

   (a) $4hc/|E_1|$
   (b) $9hc/|E_1|$
   (c) $16hc/|E_1|$
   (d) $2hc/|E_1|$
   (e) $3hc/|E_1|$

2. A luz solar pode ejetar elétrons da superfície de um satélite em órbita, carregando-o. Os projetistas de satélites procuram minimizar esse efeito através de revestimentos especiais. Suponha que um satélite seja revestido de platina, um metal com uma função trabalho muito elevada ($\phi = 8,5\times10^{-19}$ J). Qual é o maior comprimento de onda da luz solar que é capaz de ejetar elétrons de uma superfície revestida com platina?

   (a) entre 100nm e 200nm
   (b) entre 200nm e 300nm
   (c) entre 300nm e 400nm
   (d) entre 400nm e 500nm
   (e) entre 500nm e 600nm

3. Num acelerador de partículas, um elétron é acelerado até atingir a energia cinética de $9E_0$, onde $E_0 = m_e c^2$ é a energia de repouso do elétron. O módulo da velocidade v_e do elétron, em termos da velocidade da luz é dado por:

(a) $0,80c \leq v_e < 0,85c$

(b) $0,95c \leq v_e < c$.

(c) $0,85c \leq v_e < 0,90c$

(d) $0,90c \leq v_e < 0,95c$

(e) $0,75c \leq v_e < 0,80c$

4. Uma fonte de radiação eletromagnética move-se na direção radial em relação a você. A frequência que você mede para a radiação é $3/2$ vezes a frequência medida no referencial de repouso da fonte. A fonte está se aproximando ou afastando de você? Qual o valor da velocidade v_f da fonte?

(a) aproximando tal que $0,1c \leq v_f < 0,3c$

(b) aproximando tal que $0,5c \leq v_f < 0,7c$

(c) aproximando tal que $0,3c \leq v_f < 0,5c$

(d) afastando tal que $0,1c \leq v_f < 0,3c$

(e) afastando tal que $0,5c \leq v_f < 0,7c$

(f) afastando tal que $0,3c \leq v_f < 0,5c$

5. Uma nave espacial que se afasta da Terra com velocidade de $0,80c$ dispara um míssil na direção e sentido de seu movimento. A velocidade do míssil é $0,60c$ relativamente à nave. Qual é o módulo da velocidade v_m do míssil medida por um observador na Terra?

(a) $0,6c \leq v_m < 0,7c$

(b) $0,7c \leq v_m < 0,8c$

(c) $0,5c \leq v_m < 0,6c$

(d) $0,9c \leq v_m < c$

(e) $0,8c \leq v_m < 0,9c$

6. Um feixe de raios X com frequência igual a $1,5 \times 10^{19}$ Hz é espalhado por elétrons que podem ser considerados em repouso num alvo de carbono. O feixe espalhado é detectado num ângulo de 60^o em relação ao feixe incidente. Qual das alternativas abaixo corresponde à porcentagem da energia do fóton incidente que é transferida para o elétron?

(a) entre 10% e 20%

(b) entre 30% e 40%

(c) entre 40% e 50%

(d) entre 20% e 30%

(e) $< 10\%$

Seção 2. Questões VF (2×0,8 = 1,6 pontos). Questões discursivas (1× 1,6 + 1× 2,6 = 4,2)

1. [1,6 pontos] Avalie as afirmativas abaixo e diga se são verdadeiras V, ou falsas F. Todas as respostas devem apresentar justificativas.

   [(a)] [0,8 ponto] Um observador na Terra verifica que uma régua que se move em relação a ele faz um ângulo de 30^o com a horizontal (eixo x). Se a régua se move na direção vertical (eixo y) com velocidade $3c/5$, para um observador no referencial da régua o ângulo que ela faz com a horizontal é maior que 30^o.

   [(b)] [0,8 ponto] No efeito fotoelétrico define-se o potencial de corte, V_0, como o módulo do potencial entre o anodo e o catodo capaz de impedir que os elétrons mais energéticos sejam ejetados. V_0 depende linearmente da intensidade da luz incidente.

2. [1,6 pontos]
   Dois prótons, cada um com uma massa de repouso m_p, estão se deslocando inicialmente com velocidades de mesmo módulo e em sentidos opostos. Após colidirem, os prótons continuam a existir e uma partícula η_0 é criada. A massa de repouso da nova partícula é $m_{\eta 0} = m_p/2$. Se os dois prótons e a partícula η_0 encontram-se em repouso após a colisão, encontre em função dos dados da questão:

   (a) [0,8 ponto] Qual é o módulo do momento inicial P de cada próton?

   (b)[0,8 ponto] Qual é a razão r entre a energia da partícula η_0 e a energia inicial dos dois prótons?

3. [2,6 pontos]
   Considere uma partícula de massa m confinada em uma caixa infinita de lado L. Dentro da caixa, $0 < x < L$, a energia potencial é nula. Fora dos limites da caixa a energia potencial é infinita.

   (a) [0,4 ponto] Quais são os valores da função de onda independente no tempo, $u(x)$, em $x = 0$ e em $x = L$?

   (b) [1,2 ponto] Encontre a função de onda independente do tempo, $u_n(x)$, normalizada para o estado de energia de ordem n da caixa, $n = \{1, 2, 3, ...\}$.

   (c) [0,4 ponto] Quais os valores permitidos para o comprimento de onda, λ_n, da partícula na caixa?

   (d) [0,6 ponto] Considere que a partícula na caixa se encontra no primeiro estado excitado de energia. Qual é a probabilidade, P, dela ser encontrada na região $0 < x < L/2$?

Gabarito para Versão $\boxed{\text{D}}$

Seção 1. Questões objetivas (6×0,7 = 4,2 pontos)

1. (a)

2. (b)

3. (b)

4. (c)

5. (d)

6. (e)

Seção 2. Questões VF (2×0,8 = 1,6 pontos). Questões discursivas (1× 1,6 + 1× 2,6 = 4,2)

1. **Resolução:**

(a) A afirmativa é V. Vamos denominar θ o ângulo formado pela régua e o eixo x. Para o observador na Terra:

$$\tan(\theta) = \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}.$$

Para um observador no referencial de movimento da régua:

$$\tan(\theta') = \frac{\Delta \mathrm{y}'}{\Delta \mathrm{x}'}.$$

Como a régua se move na vertical, Δy do observador na Terra é contraído em relação a $\Delta y'$, e os comprimentos horizontais não se alteram, ou seja:

$$\Delta y' = \gamma \Delta y,$$

e:

$$\Delta x' = \Delta x,$$

tal que:

$$\tan(\theta') = \gamma \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}},$$

$$\tan(\theta') = \gamma \tan(\theta),$$

Como o fator de Lorentz $\gamma > 1$, $\theta' > \theta$.

(b) A afirmativa é F. No efeito fotoelétrico, o potencial de corte é dado por:

$$V_0 = \frac{h}{e} f - \frac{\phi}{e},$$

ou seja, depende linearmente da frequência e não da intensidade da radiação incidente.

■

2. **Resolução:**

.

(a) Pela conservação da energia temos:

$$2\sqrt{P^2c^2 + m_p^2c^4} = 2m_pc^2 + \frac{m_p}{2}c^2$$

Resolvendo a equação acima para P, encontramos:

$$P = \frac{3}{4} m_p c.$$

(b) Temos que:

$$r = \frac{\frac{m_p}{2} c^2}{2m_p c^2 + \frac{m_p}{2} c^2},$$

$$r = \frac{1}{5}.$$

■

3. **Resolução:**

(a) Temos que:

$$u(0) = u(L) = 0,$$

porque a probabilidade de encontrar a partícula fora da caixa é nula.

(b) Temos para a região $0 < x < L$, que a energia potencial é nula, assim:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = E u(x),$$

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right) u(x).$$

A solução da equação diferencial acima é dada por:

$$u(x) = A\mathrm{sen(kx)} + \mathrm{Bcos(kx)}.$$

Derivando a expressão acima duas vezes em relação a x encontramos:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -k^2 u(x),$$

e $k = 2mE/\hbar^2$.

Assim, para $u(0) = 0$ encontramos:

$$u(0) = A\mathrm{sen(0)} + \mathrm{Bcos(0)} = 0,$$

o que para ser satisfeita precisa ter $B = 0$.

Para $u(L) = 0$, temos:

$$A\mathrm{sen(kL)} = 0,$$

A não pode ser nulo, pois teríamos a solução identicamente nula. Logo:

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = \{1, 2, 3, ...\}.$$

A função de onda então é dada por:

$$u_n(x) = A\mathrm{sen(n\pi x/L)}.$$

Pela condição de normalização da função de onda devemos ter:

$$\int_0^L u_n^2(x) dx = 1,$$

$$\int_0^L A^2 \mathrm{sen}^2\mathrm{(n\pi x/L)dx} = 1,$$

$$\int_0^L \frac{A^2}{2} [1 - \cos\mathrm{(2n\pi x/L)]dx} = 1,$$

a integral em cosseno acima é realizada em n períodos completos, é nula. Assim:

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

e:

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \mathrm{sen(n\pi x/L)}.$$

(c) Temos:

$$k_n = \frac{n\pi}{L},$$

e $k_n = 2\pi/\lambda_n$,

assim:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = \{1, 2, 3, ...\}.$$

(d) Temos que:

$$P = \int_0^{L/2} u_2^2(x) dx,$$

$$P = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \mathrm{sen}^2\mathrm{(2\pi x/L)dx},$$

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2\mathrm{(v)dv}.$$

$$P = \frac{1}{2}.$$

■