Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Física IV-A – 2024/2 – P2 – 13/11/2024
VERSÃO: $\boxed{\text{A}}$

Formulário

CONSTANTES NUMÉRICAS

$\mu_0 = 1\times10^{-6}$ H/m; $\varepsilon_0 = (1/9)\times10^{-10}$ F/m; $c = 3\times10^{8}$ m/s; $h = 6\times10^{-34}$ J $\cdot$ s; $h = 3\times10^{-15}$ eV$\cdot$ s; $\hbar = h/(2\pi)$; $hc = 900$ eV$\cdot$ nm; $e = 2\times10^{-19}$ C; 1 eV $= 2\times10^{-19}$ J; 1 J $= 5\times10^{18}$ eV; $m_pc^2 = 1000$ MeV; $m_ec^2 = 0{,}5$ MeV; $m_e = 10^{-30}$ kg; 1μm $= 10^{-6}$ m; 1 nm $= 10^{-9}$ m; 1 Å $= 10^{-10}$ m; 1 pm $= 10^{-12}$ m; 1 GeV $= 10^{3}$ MeV $= 10^{9}$ eV; $\lambda_c = 1{,}8$ pm; $E_1 = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = -25$ eV; $a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = (9/\pi)\times10^{-11}$ m; sen(30°) $= 1/2$; sen(45°) $= \sqrt{2}/2$; sen(60°) $= \sqrt{3}/2$; sen$^2(\theta) = [1-\cos(2\theta)]/2$.

FORMULÁRIO GERAL

$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$; $\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$; $E = K + m_0c^2 = \gamma m_0 c^2$; $p = \gamma m_0 u$; $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$; $x = \gamma(x' + ut')$; $t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$; $v_x = \frac{v_x'+u}{1+(v_x'u)/c^2}$; $v_y = \frac{v_y'}{\gamma(1+(v_x'u)/c^2)}$; $p_x = \gamma(p_x' + uE'/c^2)$, $E = \gamma(E' + up_x')$, $p_y = p_y'$; $\lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{h}{mc}\right)(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta)$; $f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$; $\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$; $\Delta E\cdot\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$; $L_n = n\hbar$; $r_n = n^2a_0$; $v_n = e^2/(2n\epsilon_0 h)$; $E_n = \frac{E_1}{n^2}$; $E_n = n^2h^2/(8mL^2)$; $eV_0 = hf - \phi$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x)$; $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$; $k_2 = \sqrt{2m|E-V|}/\hbar$; $R = (\sqrt{E} - \sqrt{E-V})^2/(\sqrt{E} + \sqrt{E-V})^2$; $T = 1 - R$; $\langle x\rangle = (2k_2)^{-1} = \hbar/\sqrt{8m(E-V)}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(E-V)})\text{sen}^2(k_2L)]^{-1}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(V-E)})\text{senh}^2(k_2L)]^{-1}$, $T \simeq \frac{16E(V-E)}{V^2}\exp[-\sqrt{8m(V-E)}L/\hbar]$.

Seção 1. Questões objetivas (7×0,7 = 4,9 pontos)

1. Considere o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, onde n é o número quântico principal. Qual opção indica corretamente o raio orbital e a energia do estado fundamental?

   (a) $r = 4\frac{h^2\epsilon_0}{\pi me^2}$ e $E = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2h^2}$

   (b) $r = 2\frac{h^2\epsilon_0}{\pi me^2}$ e $E = -2\frac{me^4}{8\epsilon_0^2h^2}$

   (c) $r = \frac{h^2\epsilon_0}{16\pi me^2}$ e $E = -\frac{4me^4}{8\epsilon_0^2h^2}$

   (d) $r = \frac{h^2\epsilon_0}{4\pi me^2}$ e $E = -\frac{4me^4}{4\epsilon_0^2h^2}$

   (e) $r = \frac{h^2\epsilon_0}{\pi me^2}$ e $E = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2h^2}$

2. Em uma experiência de efeito fotoelétrico, uma superfície metálica é bombardeada por fótons com energia de 9 eV e a energia cinética máxima observada dos fotoelétrons é 5 eV . Qual é a energia máxima dos fotoelétrons quando se dobra o comprimento de onda dos fótons incidentes?

   (a) 0,5 eV

   (b) 15,0 eV

   (c) 6,5 eV

   (d) 4,5 eV

   (e) 0,0 eV

3. A hidrelétrica de Itaipu possui unidades geradoras de energia elétrica com potência instalada de $14\,GW$. Qual o número máximo N de pares elétron-pósitron seriam gerados em 2 segundos, se toda a energia elétrica gerada por Itaipu fosse utilizada apenas para essa finalidade?

   (a) $10^{19} < N \leq 10^{20}$

   (b) $10^{20} < N \leq 10^{21}$

   (c) $10^{21} < N \leq 10^{22}$

   (d) $10^{22} < N \leq 10^{23}$

   (e) $10^{23} < N \leq 10^{24}$

4. Um observador parado em relação a um referencial inercial mede o comprimento de um buraco no chão, em repouso em relação ao dado referencial, e obtém o valor de 200 m. O observador também mede o comprimento de uma nave espacial que está em movimento retilíneo uniforme em relação ao referencial inercial, obtendo o valor de 50 m. Qual deve ser a velocidade da nave, em relação ao observador, para que a nave tenha o mesmo comprimento do buraco, do ponto de vista de um passageiro em repouso em relação nave? Considere que os comprimentos da nave e do buraco sejam medidos paralelamente à velocidade da nave.

   (a) $0,4c < v \leq 0,5c$
   (b) $0,5c < v \leq 0,6c$
   (c) $0,6c < v \leq 0,7c$
   (d) $0,7c < v \leq 0,8c$
   (e) $0,8c < v \leq 0,9c$
   (f) $0,9c < v < c$

5. Em um acelerador de partícula, uma partícula de massa de repouso m_0 é acelerada até ter sua energia cinética igual a 7 vezes a sua energia de repouso. Qual expressão corresponde ao módulo do momento linear relativístico dessa particula e sua energia total?

   (a) $p = \sqrt{63} m_0 c$
   (b) $p = 3\sqrt{7} m_0 c$
   (c) $p = m_0 c$
   (d) $p = 7\sqrt{3} m_0 c$
   (e) $p = 8 m_0 c$

6. Uma partícula de massa m está confinada em uma região unidimensional do espaço. A energia potencial é dada por $U(x) = +\infty$ para $x \leq 0$ e $x \geq L$, e $U(x) = U_0$ para $0 < x < L$. Qual das opções corresponde aos níveis de energia da partícula na região $0 < x < L$?

   (a) $E = \frac{h^2}{8mL^2} n^2$
   (b) $E = U_0 - \frac{h^2}{8mL^2} n^2$
   (c) $E = U_0 + \frac{h^2}{8mL^2} n^2$
   (d) $E = -\frac{h^2}{8mL^2} n^2$
   (e) $E = \frac{h^2}{16mL^2} n$

7. Em um determinado sistema quântico, os níveis de energia de um elétron são dados pela expressão $E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right)$, com n assumindo o valor dos números naturais 0, 1, 2, etc. Qual deve ser o comprimento de onda λ de um fóton incidente para o elétron efetuar uma transição do estado fundamental para o 3° nível excitado?

   (a) $0 < \lambda \leq 0,5\pi c/\omega_0$
   (b) $0,5\pi c/\omega_0 < \lambda \leq \pi c/\omega_0$
   (c) $\pi c/\omega_0 < \lambda \leq 1,5\pi c/\omega_0$
   (d) $1,5\pi c/\omega_0 < \lambda \leq 2,0\pi c/\omega_0$
   (e) $2,0\pi c/\omega_0 < \lambda \leq 2,5c/\omega_0$

Seção 2. Questões discursivas (1 × 2,6 + 1 × 2,5 = 5,1)

1. [2,6 pontos]
   Num espalhamento Compton de um fóton por uma partícula livre em repouso, o fóton é espalhado de 180°, perdendo metade de sua energia inicial. Considere a massa de repouso da partícula livre dada por m. Em função dos dados do enunciado e de constantes fundamentais, calcule o que se pede.

   (a) [0,8 ponto] Determine o comprimento de onda λ do fóton incidente.
   (b) [0,8 ponto] Determine a energia do fóton incidente.
   (c) [1,0 ponto] Determine a energia cinética da partícula de massa m após a colisão.

2. [2,5 pontos]
Considere um sistema quântico composto de uma partícula de massa m sujeita ao potencial do poço quadrado infinito (partícula em uma caixa) de comprimento L, em um espaço unidimensional. Em função dos dados do problema e de constantes fundamentais, determine, justificando suas respostas:

(a) [0,8 ponto] o módulo da velocidade da partícula quando essa ocupa o terceiro estado excitado.

(b) [1,2 ponto] o valor da energia total da partícula quando essa possui a função de onda $\psi(x) = \sqrt{2/L}\ sen(5\pi x/L)$.

(c) [0,5 ponto] A qual estado excitado corresponde a função de onda $\psi(x)$?

Gabarito para Versão $\boxed{\text{A}}$

Seção 1. Questões objetivas (7×0,7 = 4,9 pontos)

1. (e)
2. (a)
3. (e)
4. (e)
5. (a) ou (b)
6. (c)
7. (b)

Seção 2. Questões discursivas (1 × 2,6 + 1 × 2,5 = 5,1)

1. **Resolução:**

■

① $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$

a) $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$

Como o fóton perde metade da energia inicial:

$$\lambda' = 2\lambda$$

Assim:

$$2\lambda - \lambda = \frac{h}{mc}\left(1 - \cos\pi\right)$$

$$\lambda = \frac{2h}{mc}$$

b) $E = \frac{hc}{\lambda} \rightarrow E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{2h}mc$

$$E = \frac{mc^2}{2}$$

c) $E_{f,antes} + \cancel{mc^2} = E_{f,depois} + K + \cancel{mc^2}$

$E = \frac{E}{2} + K \rightarrow K = \frac{E}{2} \rightarrow$ A energia cinética é metade da energia do fóton incidente

Então $K = \frac{1}{4}mc^2$

2. **Resolução:**

D2 a) A energia da partícula é puramente cinética

$$\frac{1}{2} m v_n^2 = E_n$$

Do formulário:

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2$$

estado fundamental $n = 1$

3º estado excitado $n = 4$

$$\frac{1}{2} m v_4^2 = \frac{h^2}{8mL^2} \cdot 4^2$$

$$v_4^2 = \frac{h^2 \, 16}{8mL^2} \cdot \frac{2}{m}$$

$$v_4 = \sqrt{\frac{4h^2}{m^2L^2}} = \frac{2h}{mL}$$

■

b) $$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \cancelto{=0}{U\psi(x)} = E\psi(x)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)$$

$$\psi(x) = A\cos kx + B\,\mathrm{sen}\,kx$$

$$\psi(0) = \psi(L) = 0$$

$$\psi(0) = A\cos 0 + B\,\cancelto{=0}{\mathrm{sen}\,0}$$

$$\Rightarrow A = 0$$

$$\psi(L) = B\,\mathrm{sen}\,kL = 0$$

$$kL = n\pi$$

$$n = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Para $n = 0$, solução trivial;

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\psi(x) = B\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Normalizando:

$$\int_0^L \psi(x)^2\,dx = 1$$

$$B^2\int_0^L \mathrm{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 1$$

$$B^2\int_0^L \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right]dx = 1$$

$$B^2\left\{\int_0^L \frac{1}{2}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L \cancelto{=0}{\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx}\right\} = 1$$

$$B^2\,\frac{L}{2} = 1; \quad B = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right);$$

$$\sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi x}{L}\right); \quad n = 5$$

$$\psi(x) = B\,\mathrm{sen}\,kx$$

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = Bk\cos x$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -Bk^2\,\mathrm{sen}\,kx$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -K^2 \, \psi(x)$$

$$K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} K_n^2$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mL^2} \pi^2 \, n^2$$

$$E_n = \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{\pi^2}{2mL^2} \, n^2$$

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} \, n^2$$

$$E_5 = \frac{h^2}{8mL^2} \cdot 25$$

$$E_5 = \frac{25}{8} \frac{h^2}{mL^2}$$

c) 4º estado excitado:

$n = 1 \rightarrow$ estado fundamental.

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Física IV-A – 2024/2 – P2 – 13/11/2024
VERSÃO: $\boxed{\text{C}}$

<u>Formulário</u>

CONSTANTES NUMÉRICAS

$\mu_0 = 1\times10^{-6}$ H/m; $\varepsilon_0 = (1/9)\times10^{-10}$ F/m; $c = 3\times10^{8}$ m/s; $h = 6\times10^{-34}$ J $\cdot$ s; $h = 3\times10^{-15}$ eV$\cdot$ s; $\hbar = h/(2\pi)$; $hc = 900$ eV$\cdot$ nm; $e = 2\times10^{-19}$ C; 1 eV $= 2\times10^{-19}$ J; 1 J $= 5\times10^{18}$ eV; $m_pc^2 = 1000$ MeV; $m_ec^2 = 0{,}5$ MeV; $m_e = 10^{-30}$ kg; 1μm $= 10^{-6}$ m; 1 nm $= 10^{-9}$ m; 1 Å $= 10^{-10}$ m; 1 pm $= 10^{-12}$ m; 1 GeV $= 10^{3}$ MeV $= 10^{9}$ eV; $\lambda_c = 1{,}8$ pm; $E_1 = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = -25$ eV; $a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = (9/\pi)\times10^{-11}$ m; $\text{sen}(30^\circ) = 1/2$; $\text{sen}(45^\circ) = \sqrt{2}/2$; $\text{sen}(60^\circ) = \sqrt{3}/2$; $\text{sen}^2(\theta) = [1-\cos(2\theta)]/2$.

FORMULÁRIO GERAL

$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$; $\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$; $E = K + m_0c^2 = \gamma m_0 c^2$; $p = \gamma m_0 u$; $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$; $x = \gamma(x' + ut')$; $t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$; $v_x = \frac{v_x'+u}{1+(v_x'u)/c^2}$; $v_y = \frac{v_y'}{\gamma(1+(v_x'u)/c^2)}$; $p_x = \gamma(p_x' + uE'/c^2)$, $E = \gamma(E' + up_x')$, $p_y = p_y'$; $\lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{h}{mc}\right)(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta)$; $f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$; $\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$; $\Delta E\cdot\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$; $L_n = n\hbar$; $r_n = n^2a_0$; $v_n = e^2/(2n\epsilon_0 h)$; $E_n = \frac{E_1}{n^2}$; $E_n = n^2h^2/(8mL^2)$; $eV_0 = hf - \phi$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x)$; $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$; $k_2 = \sqrt{2m|E-V|}/\hbar$; $R = (\sqrt{E}-\sqrt{E-V})^2/(\sqrt{E}+\sqrt{E-V})^2$; $T = 1-R$; $\langle x\rangle = (2k_2)^{-1} = \hbar/\sqrt{8m(E-V)}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(E-V)})\text{sen}^2(k_2L)]^{-1}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(V-E)})\text{senh}^2(k_2L)]^{-1}$, $T \simeq \frac{16E(V-E)}{V^2}\exp[-\sqrt{8m(V-E)}L/\hbar]$.

Seção 1. Questões objetivas (7×0,7 = 4,9 pontos)

1. A hidrelétrica de Itaipu possui unidades geradoras de energia elétrica com potência instalada de $14\,GW$. Qual o número máximo N de pares elétron-pósitron seriam gerados em 2 segundos, se toda a energia elétrica gerada por Itaipu fosse utilizada apenas para essa finalidade?

   (a) $10^{19} < N \leq 10^{20}$
   (b) $10^{20} < N \leq 10^{21}$
   (c) $10^{21} < N \leq 10^{22}$
   (d) $10^{22} < N \leq 10^{23}$
   (e) $10^{23} < N \leq 10^{24}$

2. Considere o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, onde n é o número quântico principal. Qual opção indica corretamente o raio orbital e a energia do estado fundamental?

   (a) $r = 4\frac{h^2\epsilon_0}{\pi me^2}$ e $E = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$
   (b) $r = 2\frac{h^2\epsilon_0}{\pi me^2}$ e $E = -2\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$
   (c) $r = \frac{h^2\epsilon_0}{16\pi me^2}$ e $E = -\frac{4me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$
   (d) $r = \frac{h^2\epsilon_0}{4\pi me^2}$ e $E = -\frac{4me^4}{4\epsilon_0^2 h^2}$
   (e) $r = \frac{h^2\epsilon_0}{\pi me^2}$ e $E = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$

3. Em um acelerador de partícula, uma partícula de massa de repouso m_0 é acelerada até ter sua energia cinética igual a 7 vezes a sua energia de repouso. Qual expressão corresponde ao módulo do momento linear relativístico dessa particula e sua energia total?

   (a) $p = \sqrt{63}m_0c$
   (b) $p = 3\sqrt{7}m_0c$
   (c) $p = m_0c$
   (d) $p = 7\sqrt{3}m_0c$
   (e) $p = 8m_0c$

4. Em uma experiência de efeito fotoelétrico, uma superfície metálica é bombardeada por fótons com energia de 9 eV e a energia cinética máxima observada dos fotoelétrons é 5 eV . Qual é a energia máxima dos fotoelétrons quando se dobra o comprimento de onda dos fótons incidentes?

   (a) 0,5 eV
   (b) 15,0 eV
   (c) 6,5 eV
   (d) 4,5 eV
   (e) 0,0 eV

5. Um observador parado em relação a um referencial inercial mede o comprimento de um buraco no chão, em repouso em relação ao dado referencial, e obtém o valor de 200 m. O observador também mede o comprimento de uma nave espacial que está em movimento retilíneo uniforme em relação ao referencial inercial, obtendo o valor de 50 m. Qual deve ser a velocidade da nave, em relação ao observador, para que a nave tenha o mesmo comprimento do buraco, do ponto de vista de um passageiro em repouso em relação nave? Considere que os comprimentos da nave e do buraco sejam medidos paralelamente à velocidade da nave.

   (a) $0,4c < v \leq 0,5c$
   (b) $0,5c < v \leq 0,6c$
   (c) $0,6c < v \leq 0,7c$
   (d) $0,7c < v \leq 0,8c$
   (e) $0,8c < v \leq 0,9c$
   (f) $0,9c < v < c$

6. Uma partícula de massa m está confinada em uma região unidimensional do espaço. A energia potencial é dada por $U(x) = +\infty$ para $x \leq 0$ e $x \geq L$, e $U(x) = U_0$ para $0 < x < L$. Qual das opções corresponde aos níveis de energia da partícula na região $0 < x < L$?

   (a) $E = \frac{h^2}{8mL^2}n^2$
   (b) $E = U_0 - \frac{h^2}{8mL^2}n^2$
   (c) $E = U_0 + \frac{h^2}{8mL^2}n^2$
   (d) $E = -\frac{h^2}{8mL^2}n^2$
   (e) $E = \frac{h^2}{16mL^2}n$

7. Em um determinado sistema quântico, os níveis de energia de um elétron são dados pela expressão $E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right)$, com n assumindo o valor dos números naturais 0, 1, 2, etc. Qual deve ser o comprimento de onda λ de um fóton incidente para o elétron efetuar uma transição do estado fundamental para o 3° nível excitado?

   (a) $0 < \lambda \leq 0,5\pi c/\omega_0$
   (b) $0,5\pi c/\omega_0 < \lambda \leq \pi c/\omega_0$
   (c) $\pi c/\omega_0 < \lambda \leq 1,5\pi c/\omega_0$
   (d) $1,5\pi c/\omega_0 < \lambda \leq 2,0\pi c/\omega_0$
   (e) $2,0\pi c/\omega_0 < \lambda \leq 2,5c/\omega_0$

Seção 2. Questões discursivas (1 × 2,6 + 1 × 2,5 = 5,1)

1. [2,6 pontos]
   Num espalhamento Compton de um fóton por uma partícula livre em repouso, o fóton é espalhado de 180°, perdendo metade de sua energia inicial. Considere a massa de repouso da partícula livre dada por m. Em função dos dados do enunciado e de constantes fundamentais, calcule o que se pede.

   (a) [0,8 ponto] Determine o comprimento de onda λ do fóton incidente.
   (b) [0,8 ponto] Determine a energia do fóton incidente.
   (c) [1,0 ponto] Determine a energia cinética da partícula de massa m após a colisão.

2. [2,5 pontos]
Considere um sistema quântico composto de uma partícula de massa m sujeita ao potencial do poço quadrado infinito (partícula em uma caixa) de comprimento L, em um espaço unidimensional. Em função dos dados do problema e de constantes fundamentais, determine, justificando suas respostas:

(a) [0,8 ponto] o módulo da velocidade da partícula quando essa ocupa o terceiro estado excitado.

(b) [1,2 ponto] o valor da energia total da partícula quando essa possui a função de onda $\psi(x) = \sqrt{2/L}\ sen(5\pi x/L)$.

(c) [0,5 ponto] A qual estado excitado corresponde a função de onda $\psi(x)$?

Gabarito para Versão $\boxed{C}$

Seção 1. Questões objetivas (7×0,7 = 4,9 pontos)

1. (e)
2. (e)
3. (a) ou (b)
4. (a)
5. (e)
6. (c)
7. (b)

Seção 2. Questões discursivas (1 × 2,6 + 1 × 2,5 = 5,1)

1. **Resolução:**

■

1

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

a) $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$

Como o fóton perde metade da energia inicial:

$$\lambda' = 2\lambda$$

Assim:

$$2\lambda - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\pi)$$

$$\lambda = \frac{2h}{mc} \quad //$$

b) $E = \frac{hc}{\lambda} \rightarrow E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{2h}mc$

$$E = \frac{mc^2}{2} \quad //$$

c) $E_{f,antes} + \cancel{mc^2} = E_{f,depois} + K + \cancel{mc^2}$

$E = \frac{E}{2} + K \rightarrow K = \frac{E}{2} \rightarrow$ A energia cinética é metade da energia do fóton incidente

Então $K = \frac{1}{4}mc^2$ //

2. **Resolução:**

D2 a) A energia da partícula é puramente cinética

$$\frac{1}{2} m v_n^2 = E_n$$

Do formulário:

$$E_n = \frac{h^2}{8 m L^2} n^2$$

estado fundamental $n = 1$

3º estado excitado $n = 4$

$$\frac{1}{2} m v_4^2 = \frac{h^2}{8 m L^2} \cdot 4^2$$

$$v_4^2 = \frac{h^2 \, 16}{8 m L^2} \cdot \frac{2}{m}$$

$$v_4 = \sqrt{\frac{4 h^2}{m^2 L^2}} = \frac{2h}{mL}$$

■

b) $$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \cancelto{=0}{U\psi(x)} = E\psi(x)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)$$

$$\psi(x) = A\cos kx + B\,\text{sen}\,kx$$

$$\psi(0) = \psi(L) = 0$$

$$\psi(0) = A\cos 0 + B\,\cancelto{=0}{\text{sen}\,0}$$

$$\Rightarrow A = 0$$

$$\psi(L) = B\,\text{sen}\,kL = 0$$

$$kL = n\pi$$

$$n = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Para $n = 0$, solução trivial;

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\psi(x) = B\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Normalizando:

$$\int_0^L \psi(x)^2\,dx = 1$$

$$B^2\int_0^L \text{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 1$$

$$B^2\int_0^L \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right]dx = 1$$

$$B^2\left\{\int_0^L \frac{1}{2}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L \cancelto{=0}{\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx}\right\} = 1$$

$$B^2\,\frac{L}{2} = 1;\quad B = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right);$$

$$\sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{5\pi x}{L}\right);\quad n = 5$$

$$\psi(x) = B\,\text{sen}\,kx$$

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = Bk\cos x$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -Bk^2\,\text{sen}\,kx$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -K^2 \psi(x)$$

$$K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} K_n^2$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mL^2} \pi^2 n^2$$

$$E_n = \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{\pi^2}{2mL^2} n^2$$

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2$$

$$E_5 = \frac{h^2}{8mL^2} \cdot 25$$

$$E_5 = \frac{25}{8} \frac{h^2}{mL^2}$$

c) 4º estado excitado:

$n = 1 \rightarrow$ estado fundamental.

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Física IV-A – 2024/2 – P2 – 13/11/2024
VERSÃO: E

Formulário

CONSTANTES NUMÉRICAS

$\mu_0 = 1\times10^{-6}$ H/m; $\varepsilon_0 = (1/9)\times10^{-10}$ F/m; $c = 3\times10^8$ m/s; $h = 6\times10^{-34}$ J $\cdot$ s; $h = 3\times10^{-15}$ eV$\cdot$ s; $\hbar = h/(2\pi)$; $hc = 900$ eV$\cdot$ nm; $e = 2\times10^{-19}$ C; 1 eV $= 2\times10^{-19}$ J; 1 J $= 5\times10^{18}$ eV; $m_pc^2 = 1000$ MeV; $m_ec^2 = 0{,}5$ MeV; $m_e = 10^{-30}$ kg; 1μm $= 10^{-6}$ m; 1 nm $= 10^{-9}$ m; 1 Å $= 10^{-10}$ m; 1 pm $= 10^{-12}$ m; 1 GeV $= 10^3$ MeV $= 10^9$ eV; $\lambda_c = 1{,}8$ pm; $E_1 = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = -25$ eV; $a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = (9/\pi)\times10^{-11}$ m; sen$(30^\circ) = 1/2$; sen$(45^\circ) = \sqrt{2}/2$; sen$(60^\circ) = \sqrt{3}/2$; sen$^2(\theta) = [1-\cos(2\theta)]/2$.

FORMULÁRIO GERAL

$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$; $\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$; $E = K + m_0c^2 = \gamma m_0 c^2$; $p = \gamma m_0 u$; $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$; $x = \gamma(x' + ut')$; $t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$; $v_x = \frac{v_x' + u}{1+(v_x'u)/c^2}$; $v_y = \frac{v_y'}{\gamma(1+(v_x'u)/c^2)}$; $p_x = \gamma(p_x' + uE'/c^2)$, $E = \gamma(E' + up_x')$, $p_y = p_y'$; $\lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{h}{mc}\right)(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta)$; $f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$; $\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$; $\Delta E\cdot\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$; $L_n = n\hbar$; $r_n = n^2 a_0$; $v_n = e^2/(2n\epsilon_0 h)$; $E_n = \frac{E_1}{n^2}$; $E_n = n^2h^2/(8mL^2)$; $eV_0 = hf - \phi$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x)$; $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$; $k_2 = \sqrt{2m|E-V|}/\hbar$; $R = (\sqrt{E} - \sqrt{E-V})^2/(\sqrt{E}+\sqrt{E-V})^2$; $T = 1 - R$; $\langle x\rangle = (2k_2)^{-1} = \hbar/\sqrt{8m(E-V)}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(E-V)})\text{sen}^2(k_2L)]^{-1}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(V-E)})\text{senh}^2(k_2L)]^{-1}$, $T \simeq \frac{16E(V-E)}{V^2}\exp[-\sqrt{8m(V-E)}L/\hbar]$.

Seção 1. Questões objetivas (7×0,7 = 4,9 pontos)

1. Em um determinado sistema quântico, os níveis de energia de um elétron são dados pela expressão $E_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right)$, com n assumindo o valor dos números naturais 0, 1, 2, etc. Qual deve ser o comprimento de onda λ de um fóton incidente para o elétron efetuar uma transição do estado fundamental para o 3° nível excitado?

   (a) $0 < \lambda \leq 0{,}5\pi c/\omega_0$
   (b) $0{,}5\pi c/\omega_0 < \lambda \leq \pi c/\omega_0$
   (c) $\pi c/\omega_0 < \lambda \leq 1{,}5\pi c/\omega_0$
   (d) $1{,}5\pi c/\omega_0 < \lambda \leq 2{,}0\pi c/\omega_0$
   (e) $2{,}0\pi c/\omega_0 < \lambda \leq 2{,}5c/\omega_0$

2. Em uma experiência de efeito fotoelétrico, uma superfície metálica é bombardeada por fótons com energia de 9 eV e a energia cinética máxima observada dos fotoelétrons é 5 eV . Qual é a energia máxima dos fotoelétrons quando se dobra o comprimento de onda dos fótons incidentes?

   (a) 0,5 eV
   (b) 15,0 eV
   (c) 6,5 eV
   (d) 4,5 eV
   (e) 0,0 eV

3. Uma partícula de massa m está confinada em uma região unidimensional do espaço. A energia potencial é dada por $U(x) = +\infty$ para $x \leq 0$ e $x \geq L$, e $U(x) = U_0$ para $0 < x < L$. Qual das opções corresponde aos níveis de energia da partícula na região $0 < x < L$?

   (a) $E = \frac{h^2}{8mL^2}n^2$
   (b) $E = U_0 - \frac{h^2}{8mL^2}n^2$
   (c) $E = U_0 + \frac{h^2}{8mL^2}n^2$
   (d) $E = -\frac{h^2}{8mL^2}n^2$
   (e) $E = \frac{h^2}{16mL^2}n$

4. Em um acelerador de partícula, uma partícula de massa de repouso m_0 é acelerada até ter sua energia cinética igual a 7 vezes a sua energia de repouso. Qual expressão corresponde ao módulo do momento linear relativístico dessa particula e sua energia total?

   (a) $p = \sqrt{63} m_0 c$

   (b) $p = 3\sqrt{7} m_0 c$

   (c) $p = m_0 c$

   (d) $p = 7\sqrt{3} m_0 c$

   (e) $p = 8 m_0 c$

5. A hidrelétrica de Itaipu possui unidades geradoras de energia elétrica com potência instalada de $14\,GW$. Qual o número máximo N de pares elétron-pósitron seriam gerados em 2 segundos, se toda a energia elétrica gerada por Itaipu fosse utilizada apenas para essa finalidade?

   (a) $10^{19} < N \leq 10^{20}$
   (b) $10^{20} < N \leq 10^{21}$
   (c) $10^{21} < N \leq 10^{22}$
   (d) $10^{22} < N \leq 10^{23}$
   (e) $10^{23} < N \leq 10^{24}$

6. Considere o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, onde n é o número quântico principal. Qual opção indica corretamente o raio orbital e a energia do estado fundamental?

   (a) $r = 4\frac{h^2\epsilon_0}{\pi m e^2}$ e $E = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$

   (b) $r = 2\frac{h^2\epsilon_0}{\pi m e^2}$ e $E = -2\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$

   (c) $r = \frac{h^2\epsilon_0}{16\pi m e^2}$ e $E = -\frac{4me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$

   (d) $r = \frac{h^2\epsilon_0}{4\pi m e^2}$ e $E = -\frac{4me^4}{4\epsilon_0^2 h^2}$

   (e) $r = \frac{h^2\epsilon_0}{\pi m e^2}$ e $E = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$

7. Um observador parado em relação a um referencial inercial mede o comprimento de um buraco no chão, em repouso em relação ao dado referencial, e obtém o valor de 200 m. O observador também mede o comprimento de uma nave espacial que está em movimento retilíneo uniforme em relação ao referencial inercial, obtendo o valor de 50 m. Qual deve ser a velocidade da nave, em relação ao observador, para que a nave tenha o mesmo comprimento do buraco, do ponto de vista de um passageiro em repouso em relação nave? Considere que os comprimentos da nave e do buraco sejam medidos paralelamente à velocidade da nave.

   (a) $0,4c < v \leq 0,5c$
   (b) $0,5c < v \leq 0,6c$
   (c) $0,6c < v \leq 0,7c$
   (d) $0,7c < v \leq 0,8c$
   (e) $0,8c < v \leq 0,9c$
   (f) $0,9c < v < c$

Seção 2. Questões discursivas (1 × 2,6 + 1 × 2,5 = 5,1)

1. [2,6 pontos]
   Num espalhamento Compton de um fóton por uma partícula livre em repouso, o fóton é espalhado de 180°, perdendo metade de sua energia inicial. Considere a massa de repouso da partícula livre dada por m. Em função dos dados do enunciado e de constantes fundamentais, calcule o que se pede.

(a) [0,8 ponto] Determine o comprimento de onda λ do fóton incidente.
(b) [0,8 ponto] Determine a energia do fóton incidente.
(c) [1,0 ponto] Determine a energia cinética da partícula de massa m após a colisão.

2. [2,5 pontos]

Considere um sistema quântico composto de uma partícula de massa m sujeita ao potencial do poço quadrado infinito (partícula em uma caixa) de comprimento L, em um espaço unidimensional. Em função dos dados do problema e de constantes fundamentais, determine, justificando suas respostas:

(a) [0,8 ponto] o módulo da velocidade da partícula quando essa ocupa o terceiro estado excitado.

(b) [1,2 ponto] o valor da energia total da partícula quando essa possui a função de onda $\psi(x) = \sqrt{2/L}\ sen(5\pi x/L)$.

(c) [0,5 ponto] A qual estado excitado corresponde a função de onda $\psi(x)$?

Gabarito para Versão $\boxed{\text{E}}$

Seção 1. Questões objetivas (7×0,7 = 4,9 pontos)

1. (b)

2. (a)

3. (c)

4. (a) ou (b)

5. (e)

6. (e)

7. (e)

Seção 2. Questões discursivas (1 × 2,6 + 1 × 2,5 = 5,1)

1. **Resolução:**

■

① $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$

a) $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$

Como o fóton perde metade da energia inicial:

$$\lambda' = 2\lambda$$

Assim:

$$2\lambda - \lambda = \frac{h}{mc}\left(1 - \cos\pi\right)$$

$$\lambda = \frac{2h}{mc}$$ ✓ ✓

b) $E = \frac{hc}{\lambda} \rightarrow E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{2h}mc$

$$E = \frac{mc^2}{2} //$$

c) $E_{f,\text{antes}} + \cancel{mc^2} = E_{f,\text{depois}} + K + \cancel{mc^2}$

$E = \frac{E}{2} + K \rightarrow K = \frac{E}{2} \rightarrow$ A energia cinética é metade da energia do fóton incidente

Então $K = \frac{1}{4}mc^2$ //

2. **Resolução:**

D2 a) A energia da partícula é puramente cinética

$$\frac{1}{2} m v_n^2 = E_n$$

Do formulário:

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2$$

estado fundamental $n = 1$

3º estado excitado $n = 4$

$$\frac{1}{2} m v_4^2 = \frac{h^2}{8mL^2} \cdot 4^2$$

$$v_4^2 = \frac{h^2\, 16}{8mL^2} \cdot \frac{2}{m}$$

$$v_4 = \sqrt{\frac{4h^2}{m^2L^2}} = \frac{2h}{mL}$$

■

b) $$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \cancel{U}^{=0}\,\psi(x) = E\,\psi(x)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}\,\psi(x)$$

$\psi(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx$

$\psi(0) = \psi(L) = 0$

$\psi(0) = A \cos 0 + B\, \cancel{\operatorname{sen} 0}^{=0}$

$\Rightarrow A = 0$

$\psi(L) = B \operatorname{sen} kL = 0$

$kL = n\pi$

$n = \{1, 2, 3, \dots\}$

Para $n = 0$, solução trivial;

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\psi(x) = B \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Normalizando:

$$\int_0^L \psi(x)^2\, dx = 1$$

$$B^2 \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 1$$

$$B^2 \int_0^L \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right] dx = 1$$

$$B^2 \left\{\int_0^L \frac{1}{2}\, dx - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx}_{=0}\right\} = 1$$

$$B^2 \frac{L}{2} = 1 \; ; \quad B = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\, \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) ;$$

$$\sqrt{\frac{2}{L}}\, \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{L}\right) ; \quad n = 5$$

$$\psi(x) = B \operatorname{sen} Kx$$

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = BK\cos x$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -BK^2 \operatorname{sen} Kx$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -K^2\, \psi(x)$$

$$K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} K_n^2$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mL^2}\pi^2 n^2$$

$$E_n = \frac{h^2}{4\pi^2}\frac{\pi^2}{2mL^2} n^2$$

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2$$

$$E_5 = \frac{h^2}{8mL^2} \cdot 25$$

$$E_5 = \frac{25}{8}\frac{h^2}{mL^2}$$

c) 4º estado excitado;

$n = 1 \rightarrow$ estado fundamental.

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Física IV-A – 2024/2 – P2 – 13/11/2024
VERSÃO: $\boxed{\text{G}}$

Formulário

CONSTANTES NUMÉRICAS

$\mu_0 = 1\times10^{-6}$ H/m; $\varepsilon_0 = (1/9)\times10^{-10}$ F/m; $c = 3\times10^8$ m/s; $h = 6\times10^{-34}$ J $\cdot$ s; $h = 3\times10^{-15}$ eV$\cdot$ s; $\hbar = h/(2\pi)$; $hc = 900$ eV$\cdot$ nm; $e = 2\times10^{-19}$ C; 1 eV $= 2\times10^{-19}$ J; 1 J $= 5\times10^{18}$ eV; $m_pc^2 = 1000$ MeV; $m_ec^2 = 0{,}5$ MeV; $m_e = 10^{-30}$ kg; 1μm $= 10^{-6}$ m; 1 nm $= 10^{-9}$ m; 1 Å $= 10^{-10}$ m; 1 pm $= 10^{-12}$ m; 1 GeV $= 10^3$ MeV $= 10^9$ eV; $\lambda_c = 1{,}8$ pm; $E_1 = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = -25$ eV; $a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = (9/\pi)\times10^{-11}$ m; $\text{sen}(30^\circ) = 1/2$; $\text{sen}(45^\circ) = \sqrt{2}/2$; $\text{sen}(60^\circ) = \sqrt{3}/2$; $\text{sen}^2(\theta) = [1-\cos(2\theta)]/2$.

FORMULÁRIO GERAL

$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$; $\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$; $E = K + m_0c^2 = \gamma m_0c^2$; $p = \gamma m_0 u$; $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$; $x = \gamma(x' + ut')$; $t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$; $v_x = \frac{v'_x+u}{1+(v'_xu)/c^2}$; $v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1+(v'_xu)/c^2)}$; $p_x = \gamma(p'_x + uE'/c^2)$, $E = \gamma(E' + up'_x)$, $p_y = p'_y$; $\lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{h}{mc}\right)(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta)$; $f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$; $\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$; $\Delta E\cdot\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$; $L_n = n\hbar$; $r_n = n^2a_0$; $v_n = e^2/(2n\epsilon_0 h)$; $E_n = \frac{E_1}{n^2}$; $E_n = n^2h^2/(8mL^2)$; $eV_0 = hf - \phi$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x)$; $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$; $k_2 = \sqrt{2m|E-V|}/\hbar$; $R = (\sqrt{E}-\sqrt{E-V})^2/(\sqrt{E}+\sqrt{E-V})^2$; $T = 1-R$; $\langle x\rangle = (2k_2)^{-1} = \hbar/\sqrt{8m(E-V)}$; $T = [1+(\frac{V^2}{4E(E-V)})\text{sen}^2(k_2L)]^{-1}$; $T = [1+(\frac{V^2}{4E(V-E)})\text{senh}^2(k_2L)]^{-1}$, $T \simeq \frac{16E(V-E)}{V^2}\exp[-\sqrt{8m(V-E)}L/\hbar]$.

Seção 1. Questões objetivas (7×0,7 = 4,9 pontos)

1. Um observador parado em relação a um referencial inercial mede o comprimento de um buraco no chão, em repouso em relação ao dado referencial, e obtém o valor de 200 m. O observador também mede o comprimento de uma nave espacial que está em movimento retilíneo uniforme em relação ao referencial inercial, obtendo o valor de 50 m. Qual deve ser a velocidade da nave, em relação ao observador, para que a nave tenha o mesmo comprimento do buraco, do ponto de vista de um passageiro em repouso em relação nave? Considere que os comprimentos da nave e do buraco sejam medidos paralelamente à velocidade da nave.

   (a) $0,4c < v \leq 0,5c$
   (b) $0,5c < v \leq 0,6c$
   (c) $0,6c < v \leq 0,7c$
   (d) $0,7c < v \leq 0,8c$
   (e) $0,8c < v \leq 0,9c$
   (f) $0,9c < v < c$

2. A hidrelétrica de Itaipu possui unidades geradoras de energia elétrica com potência instalada de $14\,GW$. Qual o número máximo N de pares elétron-pósitron seriam gerados em 2 segundos, se toda a energia elétrica gerada por Itaipu fosse utilizada apenas para essa finalidade?

   (a) $10^{19} < N \leq 10^{20}$
   (b) $10^{20} < N \leq 10^{21}$
   (c) $10^{21} < N \leq 10^{22}$
   (d) $10^{22} < N \leq 10^{23}$
   (e) $10^{23} < N \leq 10^{24}$

3. Em um determinado sistema quântico, os níveis de energia de um elétron são dados pela expressão $E_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right)$, com n assumindo o valor dos números naturais 0, 1, 2, etc. Qual deve ser o comprimento de onda λ de um fóton incidente para o elétron efetuar uma transição do estado fundamental para o 3° nível excitado?

   (a) $0 < \lambda \leq 0,5\pi c/\omega_0$

   (b) $0,5\pi c/\omega_0 < \lambda \leq \pi c/\omega_0$

   (c) $\pi c/\omega_0 < \lambda \leq 1,5\pi c/\omega_0$

   (d) $1,5\pi c/\omega_0 < \lambda \leq 2,0\pi c/\omega_0$

   (e) $2,0\pi c/\omega_0 < \lambda \leq 2,5c/\omega_0$

4. Em uma experiência de efeito fotoelétrico, uma superfície metálica é bombardeada por fótons com energia de 9 eV e a energia cinética máxima observada dos fotoelétrons é 5 eV . Qual é a energia máxima dos fotoelétrons quando se dobra o comprimento de onda dos fótons incidentes?

   (a) 0,5 eV

   (b) 15,0 eV

   (c) 6,5 eV

   (d) 4,5 eV

   (e) 0,0 eV

5. Considere o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, onde n é o número quântico principal. Qual opção indica corretamente o raio orbital e a energia do estado fundamental?

   (a) $r = 4\frac{h^2\epsilon_0}{\pi me^2}$ e $E = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2h^2}$

   (b) $r = 2\frac{h^2\epsilon_0}{\pi me^2}$ e $E = -2\frac{me^4}{8\epsilon_0^2h^2}$

   (c) $r = \frac{h^2\epsilon_0}{16\pi me^2}$ e $E = -\frac{4me^4}{8\epsilon_0^2h^2}$

   (d) $r = \frac{h^2\epsilon_0}{4\pi me^2}$ e $E = -\frac{4me^4}{4\epsilon_0^2h^2}$

   (e) $r = \frac{h^2\epsilon_0}{\pi me^2}$ e $E = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2h^2}$

6. Em um acelerador de partícula, uma partícula de massa de repouso m_0 é acelerada até ter sua energia cinética igual a 7 vezes a sua energia de repouso. Qual expressão corresponde ao módulo do momento linear relativístico dessa particula e sua energia total?

   (a) $p = \sqrt{63}m_0c$

   (b) $p = 3\sqrt{7}m_0c$

   (c) $p = m_0c$

   (d) $p = 7\sqrt{3}m_0c$

   (e) $p = 8m_0c$

7. Uma partícula de massa m está confinada em uma região unidimensional do espaço. A energia potencial é dada por $U(x) = +\infty$ para $x \leq 0$ e $x \geq L$, e $U(x) = U_0$ para $0 < x < L$. Qual das opções corresponde aos níveis de energia da partícula na região $0 < x < L$?

   (a) $E = \frac{h^2}{8mL^2}n^2$

   (b) $E = U_0 - \frac{h^2}{8mL^2}n^2$

   (c) $E = U_0 + \frac{h^2}{8mL^2}n^2$

   (d) $E = -\frac{h^2}{8mL^2}n^2$

   (e) $E = \frac{h^2}{16mL^2}n$

Seção 2. Questões discursivas ($1 \times 2{,}6 + 1 \times 2{,}5 = 5{,}1$)

1. [2,6 pontos]
   Num espalhamento Compton de um fóton por uma partícula livre em repouso, o fóton é espalhado de 180°, perdendo metade de sua energia inicial. Considere a massa de repouso da partícula livre dada por m. Em função dos dados do enunciado e de constantes fundamentais, calcule o que se pede.

   (a) [0,8 ponto] Determine o comprimento de onda λ do fóton incidente.
   (b) [0,8 ponto] Determine a energia do fóton incidente.

(c) [1,0 ponto] Determine a energia cinética da partícula de massa m após a colisão.

2. [2,5 pontos]
Considere um sistema quântico composto de uma partícula de massa m sujeita ao potencial do poço quadrado infinito (partícula em uma caixa) de comprimento L, em um espaço unidimensional. Em função dos dados do problema e de constantes fundamentais, determine, justificando suas respostas:

(a) [0,8 ponto] o módulo da velocidade da partícula quando essa ocupa o terceiro estado excitado.

(b) [1,2 ponto] o valor da energia total da partícula quando essa possui a função de onda $\psi(x) = \sqrt{2/L}\ sen(5\pi x/L)$.

(c) [0,5 ponto] A qual estado excitado corresponde a função de onda $\psi(x)$?

Gabarito para Versão $\boxed{\mathsf{G}}$

Seção 1. Questões objetivas (7×0,7 = 4,9 pontos)

1. (e)

2. (e)

3. (b)

4. (a)

5. (e)

6. (a) ou (b)

7. (c)

Seção 2. Questões discursivas (1 × 2,6 + 1 × 2,5 = 5,1)

1. **Resolução:**

   ■

① $$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

a) $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$

Como o fóton perde metade da energia inicial:

$$\lambda' = 2\lambda$$

Assim:

$$2\lambda - \lambda = \frac{h}{mc}\left(1 - \cos\pi\right)$$

$$\lambda = \frac{2h}{mc}$$ ✓

b) $E = \frac{hc}{\lambda} \rightarrow E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{2h} mc$

$$E = \frac{mc^2}{2}$$ //

c) $$E_{f,\text{antes}} + \cancel{mc^2} = E_{f,\text{depois}} + K + \cancel{mc^2}$$

$$E = \frac{E}{2} + K \rightarrow K = \frac{E}{2}$$ → A energia cinética é metade da energia do fóton incidente

Então $K = \frac{1}{4} mc^2$ //

2. **Resolução:**

D2 a) A energia da partícula é puramente cinética

$$\frac{1}{2} m v_n^2 = E_n$$

Do formulário:

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2$$

estado fundamental $n = 1$

3º estado excitado $n = 4$

$$\frac{1}{2} m v_4^2 = \frac{h^2}{8mL^2} \cdot 4^2$$

$$v_4^2 = \frac{h^2 \, 16}{8mL^2} \cdot \frac{2}{m}$$

$$v_4 = \sqrt{\frac{4h^2}{m^2L^2}} = \frac{2h}{mL}$$

b) $$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \overset{=0}{\cancel{U\psi(x)}} = E\psi(x)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)$$

$$\psi(x) = A\cos kx + B\,\text{sen}\,kx$$

$$\psi(0) = \psi(L) = 0$$

$$\psi(0) = A\cos 0 + B\,\overset{=0}{\cancel{\text{sen}\,0}}$$

$$\Rightarrow A = 0$$

$$\psi(L) = B\,\text{sen}\,kL = 0$$

$$kL = n\pi$$

$$n = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Para $n = 0$, solução trivial;

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\psi(x) = B\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

■

Normalizando:

$$\int_0^L \psi(x)^2\, dx = 1$$

$$B^2 \int_0^L \text{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 1$$

$$B^2 \int_0^L \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right] dx = 1$$

$$B^2 \left\{ \int_0^L \frac{1}{2}\, dx - \frac{1}{2}\int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx \right\} = 1 \quad \to = 0$$

$$B^2 \frac{L}{2} = 1 \;; \quad B = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\, \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) ;$$

$$\sqrt{\frac{2}{L}}\, \text{sen}\left(\frac{5\pi x}{L}\right) ; \quad n = 5$$

$$\psi(x) = B\, \text{sen}\, Kx$$

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = BK\cos x$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -BK^2\, \text{sen}\, Kx$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -K^2\, \psi(x)$$

$$K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} K_n^2$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mL^2}\pi^2 n^2$$

$$E_n = \frac{h^2}{4\pi^2}\frac{\pi^2}{2mL^2} n^2$$

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2$$

$$E_5 = \frac{h^2}{8mL^2}\cdot 25$$

$$E_5 = \frac{25}{8}\frac{h^2}{mL^2}$$

c) 4º estado excitado;

$n = 1 \to$ estado fundamental.