Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Física IV-A – 2023/2 – PF- 11/12/2023
VERSÃO: $\boxed{\text{A}}$

Formulário

CONSTANTES NUMÉRICAS

$\mu_0 = 1 \times 10^{-6}$ H/m; $\varepsilon_0 = (1/9) \times 10^{-10}$ F/m; $c = 3 \times 10^8$ m/s; $h = 6 \times 10^{-34}$ J $\cdot$ s; $h = 3 \times 10^{-15}$ eV$\cdot$ s; $\hbar = h/(2\pi)$; $hc = 900$ eV$\cdot$ nm; $e = 2 \times 10^{-19}$ C; 1 eV $= 2 \times 10^{-19}$ J; 1 J $= 5 \times 10^{18}$ eV; $m_p c^2 = 1000$ MeV; $m_e c^2 = 0{,}5$ MeV; 1μm $= 10^{-6}$ m; 1 nm $= 10^{-9}$ m; 1 Å $= 10^{-10}$ m; 1 pm $= 10^{-12}$ m; 1 GeV $= 10^3$ MeV $= 10^9$ eV; $\lambda_c = 1{,}8$ pm; $E_1 = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = -25$ eV; $a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = (9/\pi)\times 10^{-11}$ m; sen$(30°) = 1/2$; sen$(45°) = \sqrt{2}/2$; sen$(60°) = \sqrt{3}/2$

FORMULÁRIO GERAL

div $\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; rot $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$; div $\mathbf{B} = 0$; rot $\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$; $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$; $\mathbf{p} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$; $u = \varepsilon_0 E^2/2 + B^2/(2\mu_0)$; $\mathcal{P} = S/c$; $F = \mathcal{P}A$; $I = I_0 \left[\frac{\text{sen }(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2 \left[\frac{\text{sen }(N\phi/2)}{N\text{sen}(\phi/2)}\right]^2$; $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a\text{sen}(\theta)$; $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d\text{sen}(\theta)$; $\text{sen}(\theta_m^{(d)}) = m(\lambda/a)$; $\text{sen}(\theta_m^{(d)}) = (m + n/N)(\lambda/d)$; $\text{sen}(\theta_m^{(c)}) = m(\lambda/d)$; $R = mN = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$; $\theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{D}$; $\langle \text{sen}^2\theta \rangle = 1/2$; $E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$; $\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$; $E = K + m_0 c^2 = \gamma m_0 c^2$; $p = \gamma m_0 u$; $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$; $x = \gamma(x' + ut')$; $t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$; $v_x = \frac{v'_x + u}{1 + (v'_x u)/c^2}$; $v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1 + (v'_x u)/c^2)}$; $p_x = \gamma(p'_x + uE'/c^2)$, $E = \gamma(E' + up'_x)$, $p_y = p'_y$; $\lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{h}{mc}\right)(1 - \cos\theta) = \lambda_c(1 - \cos\theta)$; $f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$; $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$; $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$; $L_n = n\hbar$; $r_n = n^2 a_0$; $v_n = e^2/(2n\epsilon_0 h)$; $E_n = \frac{E_1}{n^2}$; $E_n = n^2 h^2/(8mL^2)$; $eV_0 = hf - w$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x)$; $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$; $k_2 = \sqrt{2m|E-V|}/\hbar$; $R = (\sqrt{E} - \sqrt{E-V})^2/(\sqrt{E} + \sqrt{E-V})^2$; $T = 1 - R$; $\langle x \rangle = (2k_2)^{-1} = \hbar/\sqrt{8m(E-V)}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(E-V)})\text{sen}^2(k_2 L)]^{-1}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(V-E)})\text{senh}^2(k_2 L)]^{-1}$, $T \simeq \frac{16E(V-E)}{V^2}\exp[-\sqrt{8m(V-E)}L/\hbar]$.

Seção 1. Questões objetivas (5×0,7 = 3,5 pontos).

1. Considere o campo elétrico de uma onda eletromagnética plana monocromática, propagando-se no vácuo, dado por:

$$\vec{E}(z,t) = (A\sqrt{\mu_0 c})\left[\cos(\pi z - \omega t)\hat{x} + \text{sen}(\pi z - \omega t)\hat{y}\right],$$

com z dado em mícrons, t em segundos e A uma constante. Qual é a polarização desta onda?

(a) Linear.
(b) Esta onda não tem polarização definida.
(c) Circular.
(d) Elíptica.

2. Considere o campo elétrico de uma onda eletromagnética plana monocromática, propagando-se no vácuo, dado por:

$$\vec{E}(z,t) = (A\sqrt{\mu_0 c})\left[\cos(\pi z - \omega t)\hat{x} + \text{sen}(\pi z - \omega t)\hat{y}\right],$$

com z dado em mícrons, t em segundos e A uma constante. Qual é frequência linear f desta onda?

(a) $1,2 \times 10^{14}\,Hz \leq f < 1,4 \times 10^{14}\,Hz$
(b) $1,4 \times 10^{14}\,Hz \leq f < 1,6 \times 10^{14}\,Hz$
(c) $1,6 \times 10^{14}\,Hz \leq f < 1,8 \times 10^{14}\,Hz$
(d) $1,8 \times 10^{14}\,Hz \leq f < 2,0 \times 10^{14}\,Hz$
(e) $2,0 \times 10^{14}\,Hz \leq f < 2,2 \times 10^{14}\,Hz$

3. Um átomo de berílio triplamente ionizado Be^{3+} (três elétrons removidos), comporta-se como um átomo de hidrogênio com uma carga nuclear quadruplicada ($Q = Ze$, onde $Z = 4$). Qual é a razão entre o módulo da velocidade do elétron no primeiro estado excitado do Be^{3+} em relação ao módulo da velocidade do elétron no primeiro estado excitado do átomo de hidrogênio, de acordo com o modelo de Bohr?

(a) 1/4

(b) 1/2

(c) 1

(d) 2

(e) 4

4. Quando luz laser de comprimento de onda $\lambda = 0,600\,\mu m$ passa por uma rede de difração, os dois primeiros máximos de intensidade no padrão de difração são observados em $\pm\theta_0$, onde θ_0 é o ângulo em relação ao máximo central e é dado por $\theta_0 = \text{arcsen}(0,3)$. Qual a densidade N de linhas (número de linhas por centímetro) dessa rede de difração ?

(a) $1500\,cm^{-1} \leq N < 2500\,cm^{-1}$

(b) $2500\,cm^{-1} \leq N < 3500\,cm^{-1}$

(c) $3500\,cm^{-1} \leq N < 4500\,cm^{-1}$

(d) $4500\,cm^{-1} \leq N < 5500\,cm^{-1}$

(e) $5500\,cm^{-1} \leq N < 6500\,cm^{-1}$

5. Considere as afirmações a seguir sobre as transformações de coordenadas/velocidades entre dois referenciais inerciais: I) as transformações de Lorentz são um caso particular das transformações de Galileu, no limite de altas velocidades. II) As transformaçções de Galileu revelam que a simultaneidade entre dois eventos é um conceito absoluto e não depende do observador. Sobre as afirmações acima podemos dizer:

(a) Apenas I é correta.

(b) Apenas II é correta.

(c) Nenhuma delas é correta.

(d) Ambas são corretas.

Seção 2. Questões discursivas (1,5 + 1,5+1,5+2,0 = 6,5 pontos)

1. [1,5 pontos]
Considere o campo elétrico de uma onda eletromagnética plana monocromática, propagando-se no vácuo, dado por:

$$\vec{E}(z,t) = (A\sqrt{\mu_0 c})\,[\cos(\pi z - \omega t)\hat{x} + \text{sen}(\pi z - \omega t)\hat{y}]\,,$$

com z dado em mícrons, t em segundos e A uma constante. Qual é a intensidade I desta onda. JUSTIFIQUE.

2. [1,5 pontos]
Quando luz laser de comprimento de onda $\lambda = 0,600\,\mu m$ passa por uma rede de difração, os dois primeiros máximos de intensidade no padrão de difração são observados em $\pm\theta_0$, onde θ_0 é o ângulo em relação ao máximo central e é dado por $\theta_0 = \text{arcsen}(0,3)$. Quantos máximos ao total, excluindo o máximo central, são observados após passagem da luz laser pela rede de difração ? (Inclua as duas regiões em torno do máximo central). JUSTIFIQUE.

3. [1,5 pontos]
Um dos comprimentos de onda emitidos por átomos de hidrogênio no laboratório é λ_0, na porção vermelha do espectro eletromagnético. Na luz emitida por uma galáxia distante, essa mesma linha espectral é observada no comprimento de onda $\lambda = 1,5\lambda_0$, na porção infravermelha do espectro. Os átomos estão se aproximando ou afastando da Terra? Qual é o módulo da velocidade dos átomos movendo relativamente à Terra, normalizado pela velocidade da luz? JUSTIFIQUE.

4. [2,0 pontos]
Um átomo de berílio triplamente ionizado Be^{3+} (três elétrons removidos), comporta-se como um átomo de hidrogênio com uma carga nuclear quadruplicada ($Q = Ze$, onde $Z = 4$).

(a) [1,0 ponto] Utilizando o conceito de onda estacionária para o elétron no átomo, e o modelo de Bohr, encontre a relação entre o raio da órbita do eletron r_n e a sua velocidade v_n. JUSTIFIQUE.

(b) [1,0 ponto] Encontre os níveis de energia E_n para o Be^{3+}. JUSTIFIQUE.

Gabarito para Versão $\boxed{\text{A}}$

Seção 1. Questões objetivas (5×0,7 = 3,5 pontos).

1. (c)
2. (b)
3. (e)
4. (d)
5. (b)

Seção 2. Questões discursivas (1,5 + 1,5+1,5+2,0 = 6,5 pontos)

1. **Resolução:**
O vetor de Poynting da onda é dado por:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}. \tag{1}$$

Igualando as densidades de energia magnética e elétrica, encontramos que o módulo de $\vec{E}$ se relaciona com o módulo de $\vec{B}$ por:

$$E = cB, \tag{2}$$

assim:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\frac{E^2}{c}\hat{k}, \tag{3}$$

onde $\hat{k}$ é um vetor unitário que aponta do sentido de propagação da onda. A intensidade I da onda é dada pela média temporal do módulo do vetor de Poynting:

$$I = \frac{1}{\mu_0}\frac{\langle E^2 \rangle}{c} = \frac{1}{\mu_0 c}\left\langle A^2 \mu_0 c \right\rangle, \tag{4}$$

observe que o módulo do vetor campo elétrico não varia no tempo. Assim:

$$\boxed{I = A^2.} \tag{5}$$

■

2. **Resolução:**

$$d\text{sen}(\theta_m) = m\lambda, \quad m = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}, \tag{6}$$

onde d é a distância entre as linhas da rede de difração . θ_0 descreve os máximos de primeira ordem, $m = \pm 1$, assim:

$$d\text{sen}(\theta_0) = \lambda, \tag{7}$$

$$d = \frac{\lambda}{\text{sen}(\theta_0)} = \frac{0,6\,\mu m}{0,3}, \tag{8}$$

$$d = 2,0\,\mu m. \tag{9}$$

O ângulo θ máximo possível de ser observado é $\pi/2$, assim:

$$d\text{sen}(\pi/2) = m_{\pi/2}\lambda, \tag{10}$$

onde $m_{\pi/2}$ é dado por:

$$m_{\pi/2} = \frac{d}{\lambda} = \frac{2\,\mu m}{0,6\,\mu m} \approx 3,3. \tag{11}$$

Como a ordem de difração é dada por um número inteiro, a ordem máxima observada é 3. Isso significa que no total, 6 máximos de difração são observados após passagem da onda eletromagnética pela rede de difração .

■

3. **Resolução:**

Uma vez que o comprimento de onda observado da radiação emitida pela galáxia distante é maior que o observado na Terra, a frequência linear, $f = c/\lambda$, é menor. A fonte, neste caso então se afasta do observador, se afasta da Terra.

Temos:

$$f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}, \tag{12}$$

onde v é a velicidade de aproximação da fonte no efeito Doppler da luz, com f_0 sendo a frequência da fonte em repouso. Assim, temos para os comprimentos de onda:

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}, \tag{13}$$

$$\lambda = \lambda_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}. \tag{14}$$

Definindo $\lambda/\lambda_0 = \alpha$, temos que $\alpha = 1,5$, e:

$$\frac{c-v}{c+v} = \alpha^2, \tag{15}$$

resolvendo para v/c encontramos:

$$\frac{v}{c} = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}, \tag{16}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{1-1,5^2}{1+1,5^2} = \frac{1-2,25}{1+2,25} = -\frac{1,25}{3,25}, \tag{17}$$

$$\boxed{\frac{v}{c} = -\frac{5}{13}.} \tag{18}$$

O sinal negativo indica que a fonte está se afastando do observador.

■

4. **Resolução:**

(a) No modelo de Bohr, o comprimento da órbina de raio r_n descrita pelo elétron é um número inteiro de comprimentos de onda do elétron (λ_e):

$$2\pi r_n = n\lambda_e, \quad n = \{1,2,3,4,...\}. \tag{19}$$

Em termos da velocidade do elétron v_n, o comprimento de onda do elétron é:

$$\lambda_e = \frac{h}{mv_n}, \tag{20}$$

onde m é a massa do elétron. Tal que:

$$mv_n r_n = n\hbar, \tag{21}$$

com $\hbar = h/(2\pi)$.

$$\boxed{v_n = \frac{\hbar}{m}\frac{n}{r_n}}. \tag{22}$$

(b) A segunda lei de Newton para o movimento do elétron no modelo de Bohr para o Be^{3+}, usando que $Q = Ze$, $Z = 4$, leva a:

$$m\frac{v_n^2}{r_n} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_n^2}. \tag{23}$$

$$v_n^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m}\frac{1}{r_n}. \tag{24}$$

Levando $1/r_n$ da equação 22 na equação 24:

$$v_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\frac{1}{n}. \tag{25}$$

A energia do elétron no átomo de Be^{3+} é dada por:

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{2}mv_n^2. \tag{26}$$

Substituindo a equação 25 na 26:

$$E_n = -\frac{1}{2}m\left[\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\frac{1}{n}\right]^2, \tag{27}$$

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}\frac{1}{n^2}, \tag{28}$$

ou:

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{8\epsilon_0^2h^2}\frac{1}{n^2}. \tag{29}$$

Para $Z = 4$:

$$\boxed{E_n = -\frac{2me^4}{\epsilon_0^2h^2}\frac{1}{n^2}}. \tag{30}$$

■

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Física IV-A – 2023/2 – PF- 11/12/2023
VERSÃO: $\boxed{\text{B}}$

Formulário

CONSTANTES NUMÉRICAS

$\mu_0 = 1\times10^{-6}$ H/m; $\varepsilon_0 = (1/9)\times10^{-10}$ F/m; $c = 3\times10^8$ m/s; $h = 6\times10^{-34}$ J $\cdot$ s; $h = 3\times10^{-15}$ eV$\cdot$ s; $\hbar = h/(2\pi)$; $hc = 900$ eV$\cdot$ nm; $e = 2\times10^{-19}$ C; 1 eV $= 2\times10^{-19}$ J; 1 J $= 5\times10^{18}$ eV; $m_pc^2 = 1000$ MeV; $m_ec^2 = 0{,}5$ MeV; 1μm $= 10^{-6}$ m; 1 nm $= 10^{-9}$ m; 1 Å $= 10^{-10}$ m; 1 pm $= 10^{-12}$ m; 1 GeV $= 10^3$ MeV $= 10^9$ eV; $\lambda_c = 1{,}8$ pm; $E_1 = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0a_0} = -25$ eV; $a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = (9/\pi)\times10^{-11}$ m; sen$(30°) = 1/2$; sen$(45°) = \sqrt{2}/2$; sen$(60°) = \sqrt{3}/2$

FORMULÁRIO GERAL

div $\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; rot $\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$; div $\mathbf{B} = 0$; rot $\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)$; $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{B}/\mu_0$; $\mathbf{p} = \varepsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B}$; $u = \varepsilon_0E^2/2 + B^2/(2\mu_0)$; $\mathcal{P} = S/c$; $F = \mathcal{P}A$; $I = I_0\left[\frac{\text{sen}\,(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2\left[\frac{\text{sen}\,(N\phi/2)}{N\text{sen}(\phi/2)}\right]^2$; $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}a\text{sen}(\theta)$; $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}d\text{sen}(\theta)$; $\text{sen}(\theta_m^{(d)}) = m(\lambda/a)$; $\text{sen}(\theta_m^{(d)}) = (m + n/N)(\lambda/d)$; $\text{sen}(\theta_m^{(c)}) = m(\lambda/d)$; $R = mN = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$; $\theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{D}$; $\langle\text{sen}^2\theta\rangle = 1/2$; $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$; $\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$; $E = K + m_0c^2 = \gamma m_0c^2$; $p = \gamma m_0u$; $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$; $x = \gamma(x' + ut')$; $t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$; $v_x = \frac{v_x'+u}{1+(v_x'u)/c^2}$; $v_y = \frac{v_y'}{\gamma(1+(v_x'u)/c^2)}$; $p_x = \gamma(p_x' + uE'/c^2)$, $E = \gamma(E' + up_x')$, $p_y = p_y'$; $\lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{h}{mc}\right)(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta)$; $f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$; $\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$; $\Delta E\cdot\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$; $L_n = n\hbar$; $r_n = n^2a_0$; $v_n = e^2/(2n\epsilon_0h)$; $E_n = \frac{E_1}{n^2}$; $E_n = n^2h^2/(8mL^2)$; $eV_0 = hf - w$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x)$; $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$; $k_2 = \sqrt{2m|E-V|}/\hbar$; $R = (\sqrt{E}-\sqrt{E-V})^2/(\sqrt{E}+\sqrt{E-V})^2$; $T = 1-R$; $\langle x\rangle = (2k_2)^{-1} = \hbar/\sqrt{8m(E-V)}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(E-V)})\text{sen}^2(k_2L)]^{-1}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(V-E)})\text{senh}^2(k_2L)]^{-1}$, $T \simeq \frac{16E(V-E)}{V^2}\exp[-\sqrt{8m(V-E)}L/\hbar]$.

Seção 1. Questões objetivas (5×0,7 = 3,5 pontos).

1. Considere o campo elétrico de uma onda eletromagnética plana monocromática, propagando-se no vácuo, dado por:

$$\vec{E}(z,t) = (A\sqrt{\mu_0 c})\left[\cos(\pi z - \omega t)\hat{x} + \text{sen}(\pi z - \omega t)\hat{y}\right],$$

com z dado em mícrons, t em segundos e A uma constante. Qual é a polarização desta onda?

(a) Linear.

(b) Esta onda não tem polarização definida.

(c) Circular.

(d) Elíptica.

2. Considere o campo elétrico de uma onda eletromagnética plana monocromática, propagando-se no vácuo, dado por:

$$\vec{E}(z,t) = (A\sqrt{\mu_0 c})\left[\cos(\pi z - \omega t)\hat{x} + \text{sen}(\pi z - \omega t)\hat{y}\right],$$

com z dado em mícrons, t em segundos e A uma constante. Qual é frequência linear f desta onda?

(a) $1,2 \times 10^{14}\,Hz \leq f < 1,4 \times 10^{14}\,Hz$

(b) $1,4 \times 10^{14}\,Hz \leq f < 1,6 \times 10^{14}\,Hz$

(c) $1,6 \times 10^{14}\,Hz \leq f < 1,8 \times 10^{14}\,Hz$

(d) $1,8 \times 10^{14}\,Hz \leq f < 2,0 \times 10^{14}\,Hz$

(e) $2,0 \times 10^{14}\,Hz \leq f < 2,2 \times 10^{14}\,Hz$

3. Um átomo de berílio triplamente ionizado Be^{3+} (três elétrons removidos), comporta-se como um átomo de hidrogênio com uma carga nuclear quadruplicada ($Q = Ze$, onde $Z = 4$). Qual é a razão entre o módulo da velocidade do elétron no primeiro estado excitado do Be^{3+} em relação ao módulo da velocidade do elétron no primeiro estado excitado do átomo de hidrogênio, de acordo com o modelo de Bohr?

(a) 1/4

(b) 1/2

(c) 1

(d) 2

(e) 4

4. Quando luz laser de comprimento de onda $\lambda = 0,600\,\mu m$ passa por uma rede de difração, os dois primeiros máximos de intensidade no padrão de difração são observados em $\pm\theta_0$, onde θ_0 é o ângulo em relação ao máximo central e é dado por $\theta_0 = \text{arcsen}(0,3)$. Qual a densidade N de linhas (número de linhas por centímetro) dessa rede de difração ?

(a) $1500\,cm^{-1} \leq N < 2500\,cm^{-1}$

(b) $2500\,cm^{-1} \leq N < 3500\,cm^{-1}$

(c) $3500\,cm^{-1} \leq N < 4500\,cm^{-1}$

(d) $4500\,cm^{-1} \leq N < 5500\,cm^{-1}$

(e) $5500\,cm^{-1} \leq N < 6500\,cm^{-1}$

5. Considere as afirmações a seguir sobre as transformações de coordenadas/velocidades entre dois referenciais inerciais: I) as transformações de Lorentz são um caso particular das transformações de Galileu, no limite de altas velocidades. II) As transformaçções de Galileu revelam que a simultaneidade entre dois eventos é um conceito absoluto e não depende do observador. Sobre as afirmações acima podemos dizer:

(a) Apenas I é correta.

(b) Apenas II é correta.

(c) Nenhuma delas é correta.

(d) Ambas são corretas.

Seção 2. Questões discursivas (1,5 + 1,5+1,5+2,0 = 6,5 pontos)

1. [1,5 pontos]
Considere o campo elétrico de uma onda eletromagnética plana monocromática, propagando-se no vácuo, dado por:

$$\vec{E}(z,t) = (A\sqrt{\mu_0 c})\left[\cos(\pi z - \omega t)\hat{x} + \mathrm{sen}(\pi z - \omega t)\hat{y}\right],$$

com z dado em mícrons, t em segundos e A uma constante. Qual é a intensidade I desta onda. JUSTIFIQUE.

2. [1,5 pontos]
Quando luz laser de comprimento de onda $\lambda = 0,600\,\mu m$ passa por uma rede de difração, os dois primeiros máximos de intensidade no padrão de difração são observados em $\pm\theta_0$, onde θ_0 é o ângulo em relação ao máximo central e é dado por $\theta_0 = \mathrm{arcsen}(0,3)$. Quantos máximos ao total, excluindo o máximo central, são observados após passagem da luz laser pela rede de difração ? (Inclua as duas regiões em torno do máximo central). JUSTIFIQUE.

3. [1,5 pontos]
Um dos comprimentos de onda emitidos por átomos de hidrogênio no laboratório é λ_0, na porção vermelha do espectro eletromagnético. Na luz emitida por uma galáxia distante, essa mesma linha espectral é observada no comprimento de onda $\lambda = 1,5\lambda_0$, na porção infravermelha do espectro. Os átomos estão se aproximando ou afastando da Terra? Qual é o módulo da velocidade dos átomos movendo relativamente à Terra, normalizado pela velocidade da luz? JUSTIFIQUE.

4. [2,0 pontos]
Um átomo de berílio triplamente ionizado Be^{3+} (três elétrons removidos), comporta-se como um átomo de hidrogênio com uma carga nuclear quadruplicada ($Q = Ze$, onde $Z = 4$).

(a) [1,0 ponto] Utilizando o conceito de onda estacionária para o elétron no átomo, e o modelo de Bohr, encontre a relação entre o raio da órbita do eletron r_n e a sua velocidade v_n. JUSTIFIQUE.

(b) [1,0 ponto] Encontre os níveis de energia E_n para o Be^{3+}. JUSTIFIQUE.

Gabarito para Versão $\boxed{\text{B}}$

Seção 1. Questões objetivas (5×0,7 = 3,5 pontos).

1. (c)
2. (b)
3. (e)
4. (d)
5. (b)

Seção 2. Questões discursivas (1,5 + 1,5+1,5+2,0 = 6,5 pontos)

1. **Resolução:**
O vetor de Poynting da onda é dado por:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}. \tag{1}$$

Igualando as densidades de energia magnética e elétrica, encontramos que o módulo de $\vec{E}$ se relaciona com o módulo de $\vec{B}$ por:

$$E = cB, \tag{2}$$

assim:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\frac{E^2}{c}\hat{k}, \tag{3}$$

onde $\hat{k}$ é um vetor unitário que aponta do sentido de propagação da onda. A intensidade I da onda é dada pela média temporal do módulo do vetor de Poynting:

$$I = \frac{1}{\mu_0}\frac{\langle E^2 \rangle}{c} = \frac{1}{\mu_0 c}\left\langle A^2 \mu_0 c \right\rangle, \tag{4}$$

observe que o módulo do vetor campo elétrico não varia no tempo. Assim:

$$\boxed{I = A^2.} \tag{5}$$

■

2. **Resolução:**

$$d\mathrm{sen}(\theta_m) = m\lambda, \quad m = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}, \tag{6}$$

onde d é a distância entre as linhas da rede de difração . θ_0 descreve os máximos de primeira ordem, $m = \pm 1$, assim:

$$d\mathrm{sen}(\theta_0) = \lambda, \tag{7}$$

$$d = \frac{\lambda}{\mathrm{sen}(\theta_0)} = \frac{0,6\,\mu m}{0,3}, \tag{8}$$

$$d = 2,0\,\mu m. \tag{9}$$

O ângulo θ máximo possível de ser observado é $\pi/2$, assim:

$$d\mathrm{sen}(\pi/2) = m_{\pi/2}\lambda, \tag{10}$$

onde $m_{\pi/2}$ é dado por:

$$m_{\pi/2} = \frac{d}{\lambda} = \frac{2\,\mu m}{0,6\,\mu m} \approx 3,3. \tag{11}$$

Como a ordem de difração é dada por um número inteiro, a ordem máxima observada é 3. Isso significa que no total, 6 máximos de difração são observados após passagem da onda eletromagnética pela rede de difração .

■

3. **Resolução:**

Uma vez que o comprimento de onda observado da radiação emitida pela galáxia distante é maior que o observado na Terra, a frequência linear, $f = c/\lambda$, é menor. A fonte, neste caso então se afasta do observador, se afasta da Terra.

Temos:

$$f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}, \tag{12}$$

onde v é a velicidade de aproximação da fonte no efeito Doppler da luz, com f_0 sendo a frequência da fonte em repouso. Assim, temos para os comprimentos de onda:

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}, \tag{13}$$

$$\lambda = \lambda_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}. \tag{14}$$

Definindo $\lambda/\lambda_0 = \alpha$, temos que $\alpha = 1,5$, e:

$$\frac{c-v}{c+v} = \alpha^2, \tag{15}$$

resolvendo para v/c encontramos:

$$\frac{v}{c} = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}, \tag{16}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{1 - 1,5^2}{1 + 1,5^2} = \frac{1 - 2,25}{1 + 2,25} = -\frac{1,25}{3,25}, \tag{17}$$

$$\boxed{\frac{v}{c} = -\frac{5}{13}}. \tag{18}$$

O sinal negativo indica que a fonte está se afastando do observador.

■

4. **Resolução:**

(a) No modelo de Bohr, o comprimento da órbina de raio r_n descrita pelo elétron é um número inteiro de comprimentos de onda do elétron (λ_e):

$$2\pi r_n = n\lambda_e, \quad n = \{1, 2, 3, 4, ...\}. \tag{19}$$

Em termos da velocidade do elétron v_n, o comprimento de onda do elétron é:

$$\lambda_e = \frac{h}{mv_n}, \tag{20}$$

onde m é a massa do elétron. Tal que:

$$mv_n r_n = n\hbar, \tag{21}$$

com $\hbar = h/(2\pi)$.

$$\boxed{v_n = \frac{\hbar}{m}\frac{n}{r_n}}. \tag{22}$$

(b) A segunda lei de Newton para o movimento do elétron no modelo de Bohr para o Be^{3+}, usando que $Q = Ze$, $Z = 4$, leva a:

$$m\frac{v_n^2}{r_n} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_n^2}. \tag{23}$$

$$v_n^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m}\frac{1}{r_n}. \tag{24}$$

Levando $1/r_n$ da equação 22 na equação 24:

$$v_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\frac{1}{n}. \tag{25}$$

A energia do elétron no átomo de Be^{3+} é dada por:

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{2}mv_n^2. \tag{26}$$

Substituindo a equação 25 na 26:

$$E_n = -\frac{1}{2}m\left[\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\frac{1}{n}\right]^2, \tag{27}$$

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}\frac{1}{n^2}, \tag{28}$$

ou:

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{8\epsilon_0^2h^2}\frac{1}{n^2}. \tag{29}$$

Para $Z = 4$:

$$\boxed{E_n = -\frac{2me^4}{\epsilon_0^2h^2}\frac{1}{n^2}}. \tag{30}$$

■

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Física IV-A – 2023/2 – PF- 11/12/2023
VERSÃO: $\boxed{\text{C}}$

Formulário

CONSTANTES NUMÉRICAS

$\mu_0 = 1\times10^{-6}$ H/m; $\varepsilon_0 = (1/9)\times10^{-10}$ F/m; $c = 3\times10^8$ m/s; $h = 6\times10^{-34}$ J $\cdot$ s; $h = 3\times10^{-15}$ eV$\cdot$ s; $\hbar = h/(2\pi)$; $hc = 900$ eV$\cdot$ nm; $e = 2\times10^{-19}$ C; 1 eV $= 2\times10^{-19}$ J; 1 J $= 5\times10^{18}$ eV; $m_pc^2 = 1000$ MeV; $m_ec^2 = 0{,}5$ MeV; 1μm $= 10^{-6}$ m; 1 nm $= 10^{-9}$ m; 1 Å $= 10^{-10}$ m; 1 pm $= 10^{-12}$ m; 1 GeV $= 10^3$ MeV $= 10^9$ eV; $\lambda_c = 1{,}8$ pm; $E_1 = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = -25$ eV; $a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = (9/\pi)\times10^{-11}$ m; sen$(30°) = 1/2$; sen$(45°) = \sqrt{2}/2$; sen$(60°) = \sqrt{3}/2$

FORMULÁRIO GERAL

$\text{div}\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; $\text{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$; $\text{div}\,\mathbf{B} = 0$; $\text{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)$; $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{B}/\mu_0$; $\mathbf{p} = \varepsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B}$; $u = \varepsilon_0E^2/2 + B^2/(2\mu_0)$; $\mathcal{P} = S/c$; $F = \mathcal{P}A$; $I = I_0\left[\frac{\text{sen}\,(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2\left[\frac{\text{sen}\,(N\phi/2)}{N\text{sen}(\phi/2)}\right]^2$; $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}a\text{sen}(\theta)$; $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}d\text{sen}(\theta)$; $\text{sen}(\theta_m^{(d)}) = m(\lambda/a)$; $\text{sen}(\theta_m^{(d)}) = (m + n/N)(\lambda/d)$; $\text{sen}(\theta_m^{(c)}) = m(\lambda/d)$; $R = mN = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$; $\theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{D}$; $\langle\text{sen}^2\theta\rangle = 1/2$; $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$; $\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$; $E = K + m_0c^2 = \gamma m_0c^2$; $p = \gamma m_0u$; $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$; $x = \gamma(x' + ut')$; $t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$; $v_x = \frac{v'_x+u}{1+(v'_xu)/c^2}$; $v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1+(v'_xu)/c^2)}$; $p_x = \gamma(p'_x + uE'/c^2)$, $E = \gamma(E' + up'_x)$, $p_y = p'_y$; $\lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{h}{mc}\right)(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta)$; $f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$; $\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$; $\Delta E\cdot\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$; $L_n = n\hbar$; $r_n = n^2a_0$; $v_n = e^2/(2n\epsilon_0h)$; $E_n = \frac{E_1}{n^2}$; $E_n = n^2h^2/(8mL^2)$; $eV_0 = hf - w$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x)$; $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$; $k_2 = \sqrt{2m|E-V|}/\hbar$; $R = (\sqrt{E}-\sqrt{E-V})^2/(\sqrt{E}+\sqrt{E-V})^2$; $T = 1-R$; $\langle x\rangle = (2k_2)^{-1} = \hbar/\sqrt{8m(E-V)}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(E-V)})\text{sen}^2(k_2L)]^{-1}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(V-E)})\text{senh}^2(k_2L)]^{-1}$, $T \simeq \frac{16E(V-E)}{V^2}\exp[-\sqrt{8m(V-E)}L/\hbar]$.

Seção 1. Questões objetivas (5×0,7 = 3,5 pontos).

1. Considere o campo elétrico de uma onda eletromagnética plana monocromática, propagando-se no vácuo, dado por:

$$\vec{E}(z,t) = (A\sqrt{\mu_0 c})\left[\cos(\pi z - \omega t)\hat{x} + \text{sen}(\pi z - \omega t)\hat{y}\right],$$

com z dado em mícrons, t em segundos e A uma constante. Qual é a polarização desta onda?

(a) Linear.

(b) Esta onda não tem polarização definida.

(c) Circular.

(d) Elíptica.

2. Considere o campo elétrico de uma onda eletromagnética plana monocromática, propagando-se no vácuo, dado por:

$$\vec{E}(z,t) = (A\sqrt{\mu_0 c})\left[\cos(\pi z - \omega t)\hat{x} + \text{sen}(\pi z - \omega t)\hat{y}\right],$$

com z dado em mícrons, t em segundos e A uma constante. Qual é frequência linear f desta onda?

(a) $1,2\times10^{14}\,Hz \leq f < 1,4\times10^{14}\,Hz$

(b) $1,4\times10^{14}\,Hz \leq f < 1,6\times10^{14}\,Hz$

(c) $1,6\times10^{14}\,Hz \leq f < 1,8\times10^{14}\,Hz$

(d) $1,8\times10^{14}\,Hz \leq f < 2,0\times10^{14}\,Hz$

(e) $2,0\times10^{14}\,Hz \leq f < 2,2\times10^{14}\,Hz$

3. Um átomo de berílio triplamente ionizado Be^{3+} (três elétrons removidos), comporta-se como um átomo de hidrogênio com uma carga nuclear quadruplicada ($Q = Ze$, onde $Z = 4$). Qual é a razão entre o módulo da velocidade do elétron no primeiro estado excitado do Be^{3+} em relação ao módulo da velocidade do elétron no primeiro estado excitado do átomo de hidrogênio, de acordo com o modelo de Bohr?

   (a) 1/4
   (b) 1/2
   (c) 1
   (d) 2
   (e) 4

4. Quando luz laser de comprimento de onda $\lambda = 0,600\,\mu m$ passa por uma rede de difração, os dois primeiros máximos de intensidade no padrão de difração são observados em $\pm\theta_0$, onde θ_0 é o ângulo em relação ao máximo central e é dado por $\theta_0 = \text{arcsen}(0,3)$. Qual a densidade N de linhas (número de linhas por centímetro) dessa rede de difração ?

   (a) $1500\,cm^{-1} \leq N < 2500\,cm^{-1}$
   (b) $2500\,cm^{-1} \leq N < 3500\,cm^{-1}$
   (c) $3500\,cm^{-1} \leq N < 4500\,cm^{-1}$
   (d) $4500\,cm^{-1} \leq N < 5500\,cm^{-1}$
   (e) $5500\,cm^{-1} \leq N < 6500\,cm^{-1}$

5. Considere as afirmações a seguir sobre as transformações de coordenadas/velocidades entre dois referenciais inerciais: I) as transformações de Lorentz são um caso particular das transformações de Galileu, no limite de altas velocidades. II) As transformaçções de Galileu revelam que a simultaneidade entre dois eventos é um conceito absoluto e não depende do observador. Sobre as afirmações acima podemos dizer:

   (a) Apenas I é correta.
   (b) Apenas II é correta.
   (c) Nenhuma delas é correta.
   (d) Ambas são corretas.

Seção 2. Questões discursivas (1,5 + 1,5+1,5+2,0 = 6,5 pontos)

1. [1,5 pontos]
   Considere o campo elétrico de uma onda eletromagnética plana monocromática, propagando-se no vácuo, dado por:

$$\vec{E}(z,t) = (A\sqrt{\mu_0 c})\left[\cos(\pi z - \omega t)\hat{x} + \text{sen}(\pi z - \omega t)\hat{y}\right],$$

   com z dado em mícrons, t em segundos e A uma constante. Qual é a intensidade I desta onda. JUSTIFIQUE.

2. [1,5 pontos]
   Quando luz laser de comprimento de onda $\lambda = 0,600\,\mu m$ passa por uma rede de difração, os dois primeiros máximos de intensidade no padrão de difração são observados em $\pm\theta_0$, onde θ_0 é o ângulo em relação ao máximo central e é dado por $\theta_0 = \text{arcsen}(0,3)$. Quantos máximos ao total, excluindo o máximo central, são observados após passagem da luz laser pela rede de difração ? (Inclua as duas regiões em torno do máximo central). JUSTIFIQUE.

3. [1,5 pontos]
   Um dos comprimentos de onda emitidos por átomos de hidrogênio no laboratório é λ_0, na porção vermelha do espectro eletromagnético. Na luz emitida por uma galáxia distante, essa mesma linha espectral é observada no comprimento de onda $\lambda = 1,5\lambda_0$, na porção infravermelha do espectro. Os átomos estão se aproximando ou afastando da Terra? Qual é o módulo da velocidade dos átomos movendo relativamente à Terra, normalizado pela velocidade da luz? JUSTIFIQUE.

4. [2,0 pontos]
   Um átomo de berílio triplamente ionizado Be^{3+} (três elétrons removidos), comporta-se como um átomo de hidrogênio com uma carga nuclear quadruplicada ($Q = Ze$, onde $Z = 4$).

   (a) [1,0 ponto] Utilizando o conceito de onda estacionária para o elétron no átomo, e o modelo de Bohr, encontre a relação entre o raio da órbita do eletron r_n e a sua velocidade v_n. JUSTIFIQUE.

   (b) [1,0 ponto] Encontre os níveis de energia E_n para o Be^{3+}. JUSTIFIQUE.

Gabarito para Versão $\boxed{\text{C}}$

Seção 1. Questões objetivas (5×0,7 = 3,5 pontos).

1. (c)
2. (b)
3. (e)
4. (d)
5. (b)

Seção 2. Questões discursivas (1,5 + 1,5+1,5+2,0 = 6,5 pontos)

1. **Resolução:**
O vetor de Poynting da onda é dado por:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}. \tag{1}$$

Igualando as densidades de energia magnética e elétrica, encontramos que o módulo de $\vec{E}$ se relaciona com o módulo de $\vec{B}$ por:

$$E = cB, \tag{2}$$

assim:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\frac{E^2}{c}\hat{k}, \tag{3}$$

onde $\hat{k}$ é um vetor unitário que aponta do sentido de propagação da onda. A intensidade I da onda é dada pela média temporal do módulo do vetor de Poynting:

$$I = \frac{1}{\mu_0}\frac{\langle E^2 \rangle}{c} = \frac{1}{\mu_0 c}\left\langle A^2 \mu_0 c \right\rangle, \tag{4}$$

observe que o módulo do vetor campo elétrico não varia no tempo. Assim:

$$\boxed{I = A^2.} \tag{5}$$

■

2. **Resolução:**

$$d\text{sen}(\theta_m) = m\lambda, \quad m = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}, \tag{6}$$

onde d é a distância entre as linhas da rede de difração . θ_0 descreve os máximos de primeira ordem, $m = \pm 1$, assim:

$$d\text{sen}(\theta_0) = \lambda, \tag{7}$$

$$d = \frac{\lambda}{\text{sen}(\theta_0)} = \frac{0,6\,\mu m}{0,3}, \tag{8}$$

$$d = 2,0\,\mu m. \tag{9}$$

O ângulo θ máximo possível de ser observado é $\pi/2$, assim:

$$d\text{sen}(\pi/2) = m_{\pi/2}\lambda, \tag{10}$$

onde $m_{\pi/2}$ é dado por:

$$m_{\pi/2} = \frac{d}{\lambda} = \frac{2\,\mu m}{0,6\,\mu m} \approx 3,3. \tag{11}$$

Como a ordem de difração é dada por um número inteiro, a ordem máxima observada é 3. Isso significa que no total, 6 máximos de difração são observados após passagem da onda eletromagnética pela rede de difração .

■

3. **Resolução:**

Uma vez que o comprimento de onda observado da radiação emitida pela galáxia distante é maior que o observado na Terra, a frequência linear, $f = c/\lambda$, é menor. A fonte, neste caso então se afasta do observador, se afasta da Terra.

Temos:

$$f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}, \tag{12}$$

onde v é a velicidade de aproximação da fonte no efeito Doppler da luz, com f_0 sendo a frequência da fonte em repouso. Assim, temos para os comprimentos de onda:

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}, \tag{13}$$

$$\lambda = \lambda_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}. \tag{14}$$

Definindo $\lambda/\lambda_0 = \alpha$, temos que $\alpha = 1,5$, e:

$$\frac{c-v}{c+v} = \alpha^2, \tag{15}$$

resolvendo para v/c encontramos:

$$\frac{v}{c} = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}, \tag{16}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{1-1,5^2}{1+1,5^2} = \frac{1-2,25}{1+2,25} = -\frac{1,25}{3,25}, \tag{17}$$

$$\boxed{\frac{v}{c} = -\frac{5}{13}.} \tag{18}$$

O sinal negativo indica que a fonte está se afastando do observador.

■

4. **Resolução:**

(a) No modelo de Bohr, o comprimento da órbina de raio r_n descrita pelo elétron é um número inteiro de comprimentos de onda do elétron (λ_e):

$$2\pi r_n = n\lambda_e, \quad n = \{1,2,3,4,...\}. \tag{19}$$

Em termos da velocidade do elétron v_n, o comprimento de onda do elétron é:

$$\lambda_e = \frac{h}{mv_n}, \tag{20}$$

onde m é a massa do elétron. Tal que:

$$mv_nr_n = n\hbar, \tag{21}$$

com $\hbar = h/(2\pi)$.

$$\boxed{v_n = \frac{\hbar}{m}\frac{n}{r_n}}. \tag{22}$$

(b) A segunda lei de Newton para o movimento do elétron no modelo de Bohr para o Be^{3+}, usando que $Q = Ze$, $Z = 4$, leva a:

$$m\frac{v_n^2}{r_n} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_n^2}. \tag{23}$$

$$v_n^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m}\frac{1}{r_n}. \tag{24}$$

Levando $1/r_n$ da equação 22 na equação 24:

$$v_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\frac{1}{n}. \tag{25}$$

A energia do elétron no átomo de Be^{3+} é dada por:

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{2}mv_n^2. \tag{26}$$

Substituindo a equação 25 na 26:

$$E_n = -\frac{1}{2}m\left[\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\frac{1}{n}\right]^2, \tag{27}$$

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}\frac{1}{n^2}, \tag{28}$$

ou:

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{8\epsilon_0^2h^2}\frac{1}{n^2}. \tag{29}$$

Para $Z = 4$:

$$\boxed{E_n = -\frac{2me^4}{\epsilon_0^2h^2}\frac{1}{n^2}}. \tag{30}$$

■

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Física IV-A – 2023/2 – PF- 11/12/2023
VERSÃO: D

Formulário

CONSTANTES NUMÉRICAS

$\mu_0 = 1\times10^{-6}$ H/m; $\varepsilon_0 = (1/9)\times10^{-10}$ F/m; $c = 3\times10^8$ m/s; $h = 6\times10^{-34}$ J · s; $h = 3\times10^{-15}$ eV· s; $\hbar = h/(2\pi)$; $hc = 900$ eV· nm; $e = 2\times10^{-19}$ C; 1 eV $= 2\times10^{-19}$ J; 1 J $= 5\times10^{18}$ eV; $m_pc^2 = 1000$ MeV; $m_ec^2 = 0{,}5$ MeV; 1μm $= 10^{-6}$ m; 1 nm $= 10^{-9}$ m; 1 Å $= 10^{-10}$ m; 1 pm $= 10^{-12}$ m; 1 GeV $= 10^3$ MeV $= 10^9$ eV; $\lambda_c = 1{,}8$ pm; $E_1 = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = -25$ eV; $a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = (9/\pi)\times10^{-11}$ m; $\mathrm{sen}(30°) = 1/2$; $\mathrm{sen}(45°) = \sqrt{2}/2$; $\mathrm{sen}(60°) = \sqrt{3}/2$

FORMULÁRIO GERAL

$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$; $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$; $\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)$; $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{B}/\mu_0$; $\mathbf{p} = \varepsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B}$; $u = \varepsilon_0E^2/2 + B^2/(2\mu_0)$; $\mathcal{P} = S/c$; $F = \mathcal{P}A$; $I = I_0\left[\frac{\mathrm{sen}\,(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2\left[\frac{\mathrm{sen}\,(N\phi/2)}{N\mathrm{sen}(\phi/2)}\right]^2$; $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}a\mathrm{sen}(\theta)$; $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}d\mathrm{sen}(\theta)$; $\mathrm{sen}(\theta_m^{(d)}) = m(\lambda/a)$; $\mathrm{sen}(\theta_m^{(d)}) = (m + n/N)(\lambda/d)$; $\mathrm{sen}(\theta_m^{(c)}) = m(\lambda/d)$; $R = mN = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$; $\theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{D}$; $\langle\mathrm{sen}^2\theta\rangle = 1/2$; $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$; $\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$; $E = K + m_0c^2 = \gamma m_0c^2$; $p = \gamma m_0u$; $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$; $x = \gamma(x' + ut')$; $t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$; $v_x = \frac{v'_x + u}{1 + (v'_xu)/c^2}$; $v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1 + (v'_xu)/c^2)}$; $p_x = \gamma(p'_x + uE'/c^2)$, $E = \gamma(E' + up'_x)$, $p_y = p'_y$; $\lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{h}{mc}\right)(1 - \cos\theta) = \lambda_c(1 - \cos\theta)$; $f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$; $\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$; $\Delta E\cdot\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$; $L_n = n\hbar$; $r_n = n^2a_0$; $v_n = e^2/(2n\epsilon_0h)$; $E_n = \frac{E_1}{n^2}$; $E_n = n^2h^2/(8mL^2)$; $eV_0 = hf - w$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x)$; $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$; $k_2 = \sqrt{2m|E - V|}/\hbar$; $R = (\sqrt{E} - \sqrt{E - V})^2/(\sqrt{E} + \sqrt{E - V})^2$; $T = 1 - R$; $\langle x\rangle = (2k_2)^{-1} = \hbar/\sqrt{8m(E - V)}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(E-V)})\mathrm{sen}^2(k_2L)]^{-1}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(V-E)})\mathrm{senh}^2(k_2L)]^{-1}$, $T \simeq \frac{16E(V-E)}{V^2}\exp[-\sqrt{8m(V - E)}L/\hbar]$.

Seção 1. Questões objetivas (5×0,7 = 3,5 pontos).

1. Considere o campo elétrico de uma onda eletromagnética plana monocromática, propagando-se no vácuo, dado por:

$$\vec{E}(z,t) = (A\sqrt{\mu_0 c})\left[\cos(\pi z - \omega t)\hat{x} + \mathrm{sen}(\pi z - \omega t)\hat{y}\right],$$

com z dado em mícrons, t em segundos e A uma constante. Qual é a polarização desta onda?

(a) Linear.

(b) Esta onda não tem polarização definida.

(c) Circular.

(d) Elíptica.

2. Considere o campo elétrico de uma onda eletromagnética plana monocromática, propagando-se no vácuo, dado por:

$$\vec{E}(z,t) = (A\sqrt{\mu_0 c})\left[\cos(\pi z - \omega t)\hat{x} + \mathrm{sen}(\pi z - \omega t)\hat{y}\right],$$

com z dado em mícrons, t em segundos e A uma constante. Qual é frequência linear f desta onda?

(a) $1,2 \times 10^{14}\,Hz \leq f < 1,4 \times 10^{14}\,Hz$

(b) $1,4 \times 10^{14}\,Hz \leq f < 1,6 \times 10^{14}\,Hz$

(c) $1,6 \times 10^{14}\,Hz \leq f < 1,8 \times 10^{14}\,Hz$

(d) $1,8 \times 10^{14}\,Hz \leq f < 2,0 \times 10^{14}\,Hz$

(e) $2,0 \times 10^{14}\,Hz \leq f < 2,2 \times 10^{14}\,Hz$

3. Um átomo de berílio triplamente ionizado Be^{3+} (três elétrons removidos), comporta-se como um átomo de hidrogênio com uma carga nuclear quadruplicada ($Q = Ze$, onde $Z = 4$). Qual é a razão entre o módulo da velocidade do elétron no primeiro estado excitado do Be^{3+} em relação ao módulo da velocidade do elétron no primeiro estado excitado do átomo de hidrogênio, de acordo com o modelo de Bohr?

(a) 1/4

(b) 1/2

(c) 1

(d) 2

(e) 4

4. Quando luz laser de comprimento de onda $\lambda = 0,600\,\mu m$ passa por uma rede de difração, os dois primeiros máximos de intensidade no padrão de difração são observados em $\pm\theta_0$, onde θ_0 é o ângulo em relação ao máximo central e é dado por $\theta_0 = \mathrm{arcsen}(0,3)$. Qual a densidade N de linhas (número de linhas por centímetro) dessa rede de difração ?

(a) $1500\,cm^{-1} \leq N < 2500\,cm^{-1}$

(b) $2500\,cm^{-1} \leq N < 3500\,cm^{-1}$

(c) $3500\,cm^{-1} \leq N < 4500\,cm^{-1}$

(d) $4500\,cm^{-1} \leq N < 5500\,cm^{-1}$

(e) $5500\,cm^{-1} \leq N < 6500\,cm^{-1}$

5. Considere as afirmações a seguir sobre as transformações de coordenadas/velocidades entre dois referenciais inerciais: I) as transformações de Lorentz são um caso particular das transformações de Galileu, no limite de altas velocidades. II) As transformaçções de Galileu revelam que a simultaneidade entre dois eventos é um conceito absoluto e não depende do observador. Sobre as afirmações acima podemos dizer:

(a) Apenas I é correta.

(b) Apenas II é correta.

(c) Nenhuma delas é correta.

(d) Ambas são corretas.

Seção 2. Questões discursivas (1,5 + 1,5+1,5+2,0 = 6,5 pontos)

1. [1,5 pontos]
   Considere o campo elétrico de uma onda eletromagnética plana monocromática, propagando-se no vácuo, dado por:

$$\vec{E}(z,t) = (A\sqrt{\mu_0 c})\left[\cos(\pi z - \omega t)\hat{x} + \mathrm{sen}(\pi z - \omega t)\hat{y}\right],$$

   com z dado em mícrons, t em segundos e A uma constante. Qual é a intensidade I desta onda. JUSTIFIQUE.

2. [1,5 pontos]
   Quando luz laser de comprimento de onda $\lambda = 0,600\,\mu m$ passa por uma rede de difração, os dois primeiros máximos de intensidade no padrão de difração são observados em $\pm\theta_0$, onde θ_0 é o ângulo em relação ao máximo central e é dado por $\theta_0 = \mathrm{arcsen}(0,3)$. Quantos máximos ao total, excluindo o máximo central, são observados após passagem da luz laser pela rede de difração ? (Inclua as duas regiões em torno do máximo central). JUSTIFIQUE.

3. [1,5 pontos]
   Um dos comprimentos de onda emitidos por átomos de hidrogênio no laboratório é λ_0, na porção vermelha do espectro eletromagnético. Na luz emitida por uma galáxia distante, essa mesma linha espectral é observada no comprimento de onda $\lambda = 1,5\lambda_0$, na porção infravermelha do espectro. Os átomos estão se aproximando ou afastando da Terra? Qual é o módulo da velocidade dos átomos movendo relativamente à Terra, normalizado pela velocidade da luz? JUSTIFIQUE.

4. [2,0 pontos]
   Um átomo de berílio triplamente ionizado Be^{3+} (três elétrons removidos), comporta-se como um átomo de hidrogênio com uma carga nuclear quadruplicada ($Q = Ze$, onde $Z = 4$).

   (a) [1,0 ponto] Utilizando o conceito de onda estacionária para o elétron no átomo, e o modelo de Bohr, encontre a relação entre o raio da órbita do eletron r_n e a sua velocidade v_n. JUSTIFIQUE.

   (b) [1,0 ponto] Encontre os níveis de energia E_n para o Be^{3+}. JUSTIFIQUE.

Gabarito para Versão $\boxed{\text{D}}$

Seção 1. Questões objetivas (5×0,7 = 3,5 pontos).

1. (c)
2. (b)
3. (e)
4. (d)
5. (b)

Seção 2. Questões discursivas (1,5 + 1,5+1,5+2,0 = 6,5 pontos)

1. **Resolução:**
O vetor de Poynting da onda é dado por:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}. \tag{1}$$

Igualando as densidades de energia magnética e elétrica, encontramos que o módulo de $\vec{E}$ se relaciona com o módulo de $\vec{B}$ por:

$$E = cB, \tag{2}$$

assim:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\frac{E^2}{c}\hat{k}, \tag{3}$$

onde $\hat{k}$ é um vetor unitário que aponta do sentido de propagação da onda. A intensidade I da onda é dada pela média temporal do módulo do vetor de Poynting:

$$I = \frac{1}{\mu_0}\frac{\left\langle E^2 \right\rangle}{c} = \frac{1}{\mu_0 c}\left\langle A^2 \mu_0 c \right\rangle, \tag{4}$$

observe que o módulo do vetor campo elétrico não varia no tempo. Assim:

$$\boxed{I = A^2.} \tag{5}$$

■

2. **Resolução:**

$$d\text{sen}(\theta_m) = m\lambda, \quad m = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}, \tag{6}$$

onde d é a distância entre as linhas da rede de difração . θ_0 descreve os máximos de primeira ordem, $m = \pm 1$, assim:

$$d\text{sen}(\theta_0) = \lambda, \tag{7}$$

$$d = \frac{\lambda}{\text{sen}(\theta_0)} = \frac{0,6\,\mu m}{0,3}, \tag{8}$$

$$d = 2,0\,\mu m. \tag{9}$$

O ângulo θ máximo possível de ser observado é $\pi/2$, assim:

$$d\text{sen}(\pi/2) = m_{\pi/2}\lambda, \tag{10}$$

onde $m_{\pi/2}$ é dado por:

$$m_{\pi/2} = \frac{d}{\lambda} = \frac{2\,\mu m}{0,6\,\mu m} \approx 3,3. \tag{11}$$

Como a ordem de difração é dada por um número inteiro, a ordem máxima observada é 3. Isso significa que no total, 6 máximos de difração são observados após passagem da onda eletromagnética pela rede de difração .

■

3. **Resolução:**

Uma vez que o comprimento de onda observado da radiação emitida pela galáxia distante é maior que o observado na Terra, a frequência linear, $f = c/\lambda$, é menor. A fonte, neste caso então se afasta do observador, se afasta da Terra.

Temos:

$$f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}, \tag{12}$$

onde v é a velicidade de aproximação da fonte no efeito Doppler da luz, com f_0 sendo a frequência da fonte em repouso. Assim, temos para os comprimentos de onda:

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}, \tag{13}$$

$$\lambda = \lambda_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}. \tag{14}$$

Definindo $\lambda/\lambda_0 = \alpha$, temos que $\alpha = 1,5$, e:

$$\frac{c-v}{c+v} = \alpha^2, \tag{15}$$

resolvendo para v/c encontramos:

$$\frac{v}{c} = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}, \tag{16}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{1 - 1,5^2}{1 + 1,5^2} = \frac{1 - 2,25}{1 + 2,25} = -\frac{1,25}{3,25}, \tag{17}$$

$$\boxed{\frac{v}{c} = -\frac{5}{13}.} \tag{18}$$

O sinal negativo indica que a fonte está se afastando do observador.

■

4. **Resolução:**

(a) No modelo de Bohr, o comprimento da órbina de raio r_n descrita pelo elétron é um número inteiro de comprimentos de onda do elétron (λ_e):

$$2\pi r_n = n\lambda_e, \quad n = \{1, 2, 3, 4, ...\}. \tag{19}$$

Em termos da velocidade do elétron v_n, o comprimento de onda do elétron é:

$$\lambda_e = \frac{h}{mv_n}, \tag{20}$$

onde m é a massa do elétron. Tal que:

$$mv_n r_n = n\hbar, \tag{21}$$

com $\hbar = h/(2\pi)$.

$$\boxed{v_n = \frac{\hbar}{m}\frac{n}{r_n}}. \tag{22}$$

(b) A segunda lei de Newton para o movimento do elétron no modelo de Bohr para o Be^{3+}, usando que $Q = Ze$, $Z = 4$, leva a:

$$m\frac{v_n^2}{r_n} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_n^2}. \tag{23}$$

$$v_n^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m}\frac{1}{r_n}. \tag{24}$$

Levando $1/r_n$ da equação 22 na equação 24:

$$v_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\frac{1}{n}. \tag{25}$$

A energia do elétron no átomo de Be^{3+} é dada por:

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{2}mv_n^2. \tag{26}$$

Substituindo a equação 25 na 26:

$$E_n = -\frac{1}{2}m\left[\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\frac{1}{n}\right]^2, \tag{27}$$

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}\frac{1}{n^2}, \tag{28}$$

ou:

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{8\epsilon_0^2h^2}\frac{1}{n^2}. \tag{29}$$

Para $Z = 4$:

$$\boxed{E_n = -\frac{2me^4}{\epsilon_0^2h^2}\frac{1}{n^2}}. \tag{30}$$

■