Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Física IV-A – 2023/2 – SC- 18/12/2023
VERSÃO: A

Formulário

CONSTANTES NUMÉRICAS

$\mu_0 = 1 \times 10^{-6}$ H/m; $\varepsilon_0 = (1/9) \times 10^{-10}$ F/m; $c = 3 \times 10^8$ m/s; $h = 6 \times 10^{-34}$ J $\cdot$ s; $h = 3 \times 10^{-15}$ eV$\cdot$ s; $\hbar = h/(2\pi)$; $hc = 900$ eV$\cdot$ nm; $e = 2 \times 10^{-19}$ C; 1 eV $= 2 \times 10^{-19}$ J; 1 J $= 5 \times 10^{18}$ eV; $m_p c^2 = 1000$ MeV; $m_e c^2 = 0{,}5$ MeV; 1μm $= 10^{-6}$ m; 1 nm $= 10^{-9}$ m; 1 Å $= 10^{-10}$ m; 1 pm $= 10^{-12}$ m; 1 GeV $= 10^3$ MeV $= 10^9$ eV; $\lambda_c = 1{,}8$ pm; $E_1 = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = -25$ eV; $a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = (9/\pi)\times 10^{-11}$ m; sen$(30°) = 1/2$; sen$(45°) = \sqrt{2}/2$; sen$(60°) = \sqrt{3}/2$

FORMULÁRIO GERAL

div $\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; rot $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$; div $\mathbf{B} = 0$; rot $\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$; $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$; $\mathbf{p} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$; $u = \varepsilon_0 E^2/2 + B^2/(2\mu_0)$; $\mathcal{P} = S/c$; $F = \mathcal{P}A$; $I = I_0 \left[\frac{\text{sen }(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2 \left[\frac{\text{sen }(N\phi/2)}{\text{sen}(\phi/2)}\right]^2$; $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a\text{sen}(\theta)$; $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d\text{sen}(\theta)$; sen$(\theta_m^{(d)}) = m(\lambda/a)$; sen$(\theta_m^{(d)}) = (m + n/N)(\lambda/d)$; sen$(\theta_m^{(c)}) = m(\lambda/d)$; $R = mN = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$; $\theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{D}$; $\langle \text{sen}^2\theta \rangle = 1/2$; $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$; $\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$; $E = K + m_0c^2 = \gamma m_0 c^2$; $p = \gamma m_0 u$; $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$; $x = \gamma(x' + ut')$; $t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$; $v_x = \frac{v'_x + u}{1 + (v'_x u)/c^2}$; $v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1+(v'_x u)/c^2)}$; $p_x = \gamma(p'_x + uE'/c^2)$, $E = \gamma(E' + up'_x)$, $p_y = p'_y$; $\lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{h}{mc}\right)(1 - \cos\theta) = \lambda_c(1 - \cos\theta)$; $f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$; $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$; $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$; $L_n = n\hbar$; $r_n = n^2 a_0$; $v_n = e^2/(2n\epsilon_0 h)$; $E_n = \frac{E_1}{n^2}$; $E_n = n^2h^2/(8mL^2)$; $eV_0 = hf - w$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + U(x)u(x) = Eu(x)$; $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$; $k_2 = \sqrt{2m|E - V|}/\hbar$; $R = (\sqrt{E} - \sqrt{E-V})^2/(\sqrt{E} + \sqrt{E-V})^2$; $T = 1 - R$; $\langle x \rangle = (2k_2)^{-1} = \hbar/\sqrt{8m(E-V)}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(E-V)})\text{sen}^2(k_2L)]^{-1}$; $T = [1 + (\frac{V^2}{4E(V-E)})\text{senh}^2(k_2L)]^{-1}$, $T \simeq \frac{16E(V-E)}{V^2}\exp[-\sqrt{8m(V-E)}L/\hbar]$.

Seção 1. Questões objetivas (não há).

Seção 2. Questões discursivas (2,5 + 2,5+2,5+2,5 = 10 pontos)

1. [2,5 pontos]
O campo elétrico de uma onda eletromagnética plana que se propaga no vácuo é dado por:

$$\vec{E}(z,t) = \{(2{,}0\,V/m)\cos\left[\frac{2\pi}{400\,nm}(z - ct)\right]\hat{x} + \tag{1}$$

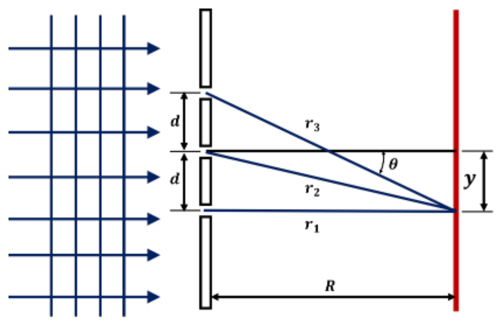
$$(\sqrt{3}\,V/m)\cos\left[\frac{2\pi}{400\,nm}(z - ct)\right]\hat{y}\}. \tag{2}$$

(a) [0,7 ponto] Determine o comprimento de onda λ e a frequência linear f dessa onda. JUSTIFIQUE.

(b) [0,8 ponto] Determine o campo magnético $\vec{B}$ e a polarização dessa onda. JUSTIFIQUE.

(c) [1,0 ponto] Quais são o vetor de Poynting $\vec{S}$ e a intensidade I dessa onda? JUSTIFIQUE.

2. [2,5 pontos]
Uma onda plana monocromática com intensidade I_0 e comprimento de onda λ incide em três fendas muito finas, espaçadas de uma distância $d = 4\lambda$, como indicado na figura abaixo. Considere $R \gg d$ e $R \gg y$.



(a) [1,0 ponto] Encontre a intensidade luminosa no anteparo para um dado valor de θ em termos de I_0 e ϕ, onde $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d\text{sen}(\theta)$. JUSTIFIQUE.

(c) [0,5 ponto] Qual é o valor da intensidade I_{max} do máximo central? JUSTIFIQUE.

(c) [0,5 ponto] Qual é o menor valor de θ, diferente de zero, para o qual observa-se outro máximo de intensidade (I_{max}) no padrão de difração? JUSTIFIQUE.

(d) [0,5 ponto] Qual é o menor valore de θ, em módulo, para o qual observa-se um mínimo de intensidade no padrão de difração? JUSTIFIQUE.

3. [2,5 pontos]
Duas partıculas, cada uma com massa de repouso m_0, estão em rota de colisão frontal. O módulo da velocidade de cada uma delas para um dado referencial inercial é $0,8c$ onde c é a velocidade da luz no vácuo. Durante a colisão, estas partículas são aniquiladas completamente, dando origem a uma nova partícula. Em relação ao dado referencial inercial, determine o que se pede em função de m_0 e c.

(a) [1,0 ponto] O momento linear relativístico, $\vec{P}$ (módulo, direção e sentido) de cada partícula. Deixe claro as direções e sentidos dos eixos coordenados do referencial inercial utilizado. JUSTIFIQUE.

(b) [0,5 ponto] A energia relativística total, E, do sistema. JUSTIFIQUE.

(c) [1,0 ponto] A massa relativística M e a massa de repouso M_0 da nova partícula criada. JUSTIFIQUE.

4. [2,5 pontos]
Num espalhamento Compton de um fóton por uma partícula livre em repouso, o fóton é espalhado de 180^o, perdendo metade de sua energia inicial. Considere a massa de repouso da partícula livre dada por m. Em função dos dados do enunciado e de constantes fundamentais, determine o que se pede.

(a) [0,8 ponto] Qual é o comprimento de onda λ do fóton incidente? JUSTIFIQUE.

(b) [0,7 ponto] Qual é a energia E do fóton incidente? JUSTIFIQUE.

(c) [1,0 ponto] Quais são a energia (E_p) e o módulo do momento linear (P) da partícula após a colisão? JUSTIFIQUE.

Questão 1

a) Temos que:

$$\frac{2\pi}{400\,nm} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = 400\,nm$$

Assim:

$$\lambda f = 3\times10^{8}\,m/s \quad ; \quad f = \frac{3\times10^{8}\,m/s}{400\,nm}$$

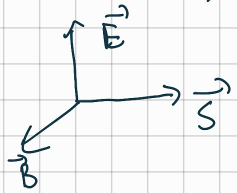
$$f = \frac{3\times10^{8}\,m/s}{400\times10^{-9}\,m} \quad ; \quad f = \frac{3}{4}\,\frac{\times10^{8}}{10^{-7}}\,Hz$$

$$f = 0{,}75\times10^{15}\,Hz$$

$$f = 7{,}5\times10^{14}\,Hz$$

b) Os campos $\vec{E}$, $\vec{B}$ e $\vec{S}$ formam um conjunto dextrógiro de vetores, tal que:

• $\vec{B} = ?$



$$\hat{B} = \hat{S}\times\hat{E} \quad ; \text{ mas } \hat{S} = \hat{k}$$

$\hat{A}$ → vetor unitário na direção e sentido de $\vec{A}$.

Assim:

$$\hat{B} = \hat{k}\times\hat{E} \quad ; \quad \hat{B}\,B = B\,\hat{k}\times\hat{E}$$

$$\vec{B} = B\,\hat{k}\times\hat{E} \,,$$

Mas:

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2\mu_0}B^2 \quad ; \quad E^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}B^2$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}B \quad ; \quad E = cB \quad \text{e:}$$

$$\vec{B} = \frac{E}{c}\,\hat{k}\times\hat{E} \quad ; \quad \vec{B} = \frac{1}{c}\,\hat{k}\times\vec{E}$$

Pela expressão do campo $\vec{E}$, $\hat{k} = \hat{z}$, e assim:

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\,\hat{z}\times\left\{2\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\right]\hat{x} + \sqrt{3}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\right]\hat{y}\right\}$$

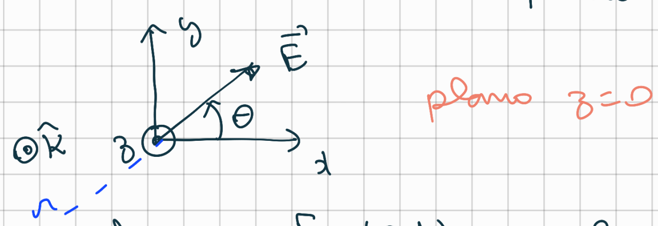
$$\vec{B} = \frac{1}{c}\left\{2\hat{y}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\right] + \sqrt{3}(-\hat{x})\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\right]\right\}$$

$\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\left(2\hat{y} - \sqrt{3}\hat{x}\right)\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\right]$$

• Polarização = ?

Vamos definir o ângulo θ formado pelo campo $\vec{E}$ e o eixo x no plano $z=0$:



$$\tan\theta = \frac{E_y(0,t)}{E_x(0,t)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

A $\tan\theta$ é constante no tempo, o campo elétrico oscila na reta suporte "r", esta onda eletromagnética é linearmente polarizada.

c) • $\vec{S}$

O vetor de Poynting $\vec{S}$ da onda é dado por

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} E B \hat{k}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} E \frac{E}{c} \hat{k}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \hat{k}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} \left[2^2 + (\sqrt{3})^2 \right] \frac{V^2}{m^2} \cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \right] \hat{z}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} 7 \frac{V^2}{m^2} \cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \right] \hat{z}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{10^{-6} \frac{H}{m} \times 3{,}0 \times 10^{8} \, m/s} \times 7 \left(\frac{V^2}{m^2} \right) \cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \right] \hat{z}$$

$$\vec{S} = \frac{7}{3} \times 10^{-2} \frac{W}{m^2} \cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \right] \hat{z}$$

• I

$$I = \langle S \rangle$$

$$I = \frac{7}{3} \times 10^{-2} \frac{W}{m^2} \underbrace{\left\langle \cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \right] \right\rangle}_{1/2}$$

$$I = \frac{7}{6} \times 10^{-2} \frac{W}{m^2}$$

Questão (2)

a) Do formulário dado temos:

$$I = I_0 \left[\frac{\text{sen}\, \beta/2}{\beta/2} \right]^2 \left[\frac{\text{sen}\, N\phi/2}{\text{sen}\, \phi/2} \right]^2$$

Com $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \,\text{sen}\,\theta$ sendo relacionado com a difração por uma fenda simples e $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \,\text{sen}\,\theta$, relacionado com a interferência entre fendas.

Como as fendas são muito finas; $\frac{\text{sen}\, \beta/2}{\beta/2} \cong 1$, e:

$$I = I_0 \left[\frac{\text{sen}\, N\phi/2}{\text{sen}\, \phi/2} \right]^2$$

I_0 sendo a intensidade da onda eletromagnética incidente. Com $N = 3$:

$$I = I_0 \left[\frac{\text{sen}\, \frac{3\phi}{2}}{\text{sen}\, \frac{\phi}{2}} \right]^2$$

b) I_{max} é obtido fazendo $\theta = 0 \Rightarrow \phi = 0$; assim:

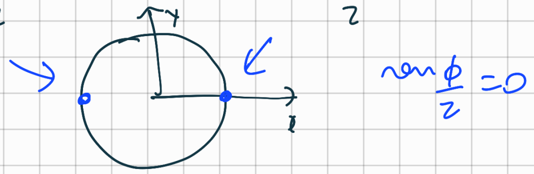
$$I_{max} = I_0 \lim_{\phi \to 0} \left[\frac{\text{sen}\, \frac{3\phi}{2}}{\text{sen}\, \phi/2} \right]^2$$

$$I_{max} = I_0 \left(\frac{3\phi}{2} \right)^2 / (\phi/2)^2$$

$$\boxed{I_{max} = 9 I_0}$$

c) O máximo de intensidade é observado quando o denominador na expressão da intensidade se aproxima do valor "0", assim:

$$sen^2 \frac{\phi}{2} = 0 \Rightarrow sen \frac{\phi}{2} = 0$$



$$\frac{\phi}{2} = m\pi \; ; \; m = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

$$\frac{\cancel{2\pi}}{\lambda} d\, sen\,\theta_m = \cancel{2} m \pi \; ; \; m = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

$$d\, sen\,\theta_m = m\lambda \; ; \; m\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

O menor valor de θ, diferente de zero é

$$\theta_1 = \frac{\lambda}{d} \; ; \; p/\ \theta \ll 1.$$

$$\theta_1 = \frac{\lambda}{4\lambda} \; ; \; \boxed{\theta_1 = \frac{1}{4}\ rad}$$

d) Os mínimos de intensidade acontecem quando o numerador é nulo na expressão da intensidade, excetuando os valores de θ que fazem o denominador ser nulo. Assim:

$$sen^2\left(\frac{3\phi}{2}\right) = 0 \; ; \; sen\frac{3\phi}{2} = 0$$

$$\frac{3\phi}{2} = n\pi \; ; \; n = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \dots\}$$

Mas p/ $n=0$; $n=3$; $n=6, \dots$, θ_n coincide com θ_m, e esses valores não correspondem a mínimos. Logo:

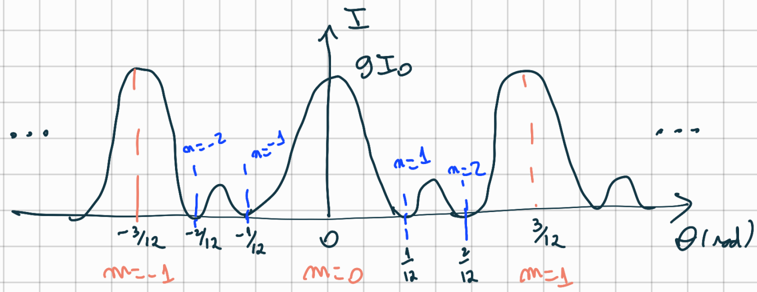
$$3 \cdot \frac{\cancel{2\pi}}{\lambda} d\, sen\,\theta_n = \cancel{2} n \pi \; ; \; n = \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$$

$$d\, sen\,\theta_n = n \frac{\lambda}{3} \; ; \; n = \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$$

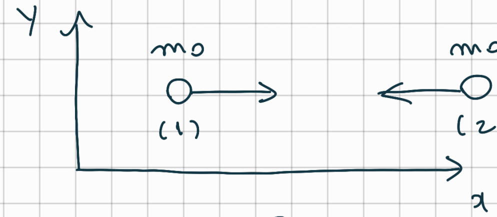
$$sen\,\theta_n = \frac{n\lambda}{3d} \; ; \; n = \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$$

O primeiro mínimo é dado p/ $\theta \ll 1$:

$$\theta_{n=1} = \frac{\lambda}{3d} \; ; \; \theta_{n=1} = \frac{\lambda}{3 \times 4\lambda} \; ; \; \boxed{\theta_{n=1} = \frac{1}{12}\ rad}$$



Questão 3



$$v_1 = v_2 = 0{,}8c$$

a) $\vec{p}_1 = m_0 \gamma v_1 \hat{x}$

$$\vec{p}_1 = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} v_1 \hat{x}$$

$$\vec{p}_1 = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}} v_1 \hat{x}$$

$$\vec{P}_1 = \frac{m_0}{\sqrt{\frac{25-16}{25}}} v_1 \hat{x}$$

$$\vec{P}_1 = \frac{\cancel{5}}{3} m_0 \cdot \frac{4}{\cancel{5}} c \, \hat{x}$$

$$\vec{P}_1 = \frac{4}{3} m_0 c \, \hat{x}$$

$$\vec{P}_2 = -\frac{4}{3} m_0 c \, \hat{x} ,$$

$\vec{P}_2$ tem mesmo módulo e direção, mas sentido contrário do $\vec{P}_1$.

b) Do formulário temos para cada partícula:

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$$

A energia das duas partículas é então dada por:

$$E = \sqrt{(P_1c)^2 + (m_0c^2)^2} + \sqrt{(P_2c)^2 + (m_0c^2)^2}$$

$$E = 2\sqrt{\left(\frac{4}{3} m_0 c^2\right)^2 + (m_0c^2)^2}$$

$$E = 2\sqrt{\frac{16}{9} m_0^2 c^4 + (m_0c^2)^2}$$

$$E = 2\sqrt{\frac{16 m_0^2 c^4 + 9 m_0^2 c^4}{9}}$$

$$E = 2 \times \sqrt{\frac{25 m_0^2 c^4}{9}}$$

$$E = 2 \times \frac{5}{3} m_0 c^2$$

$$E = \frac{10}{3} m_0 c^2$$

c) A nova partícula criada está em repouso, pois caso contrário, o momento linear do sistema não seria conservado. Assim sua massa relativística é igual a sua massa de repouso:

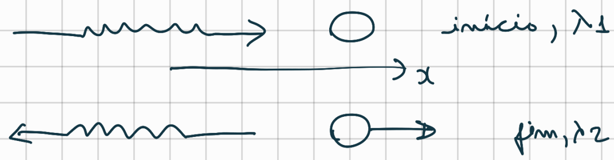
$$M = M_0$$

e:

$$E = Mc^2 = M_0c^2 = \frac{10}{3} m_0 c^2$$

$$M = M_0 = \frac{10}{3} m_0$$

Questão 4



a) Do formulário temos que para o espalhamento Compton:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

Como o fóton perdeu metade da energia após a colisão: $E_1 = hf_1 = \frac{hc}{\lambda_1}$

$$E_2 = \frac{1}{2} E_1 = \frac{hc}{\lambda_2} ,$$ assim

$$E_1 = \frac{2\cancel{hc}}{\lambda_2} = \frac{\cancel{hc}}{\lambda_1} ; \quad \lambda_2 = 2\lambda_1$$

Mas: $\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}\underbrace{(1 - \overset{-1}{\cos\pi})}_{2}$

$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{2h}{mc}$; $\lambda_2 = 2\lambda_1$,

substituindo:

$2\lambda_1 - \lambda_1 = \frac{2h}{mc}$

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{2h}{mc}}$$

b) $E_1 = \frac{hc}{\lambda_1}$; $E_1 = \frac{\cancel{h}c \; mc}{2\cancel{h}}$

$$\boxed{E_1 = \frac{1}{2}mc^2}$$

c) Antes da colisão, o momento linear total é o momento do fóton:

$\vec{P} = \vec{p}_1 = \frac{h}{\lambda_1}\hat{x}$

$\vec{P} = \frac{\cancel{h}}{2\cancel{h}}mc\,\hat{x}$

$$\boxed{\vec{P} = \vec{p}_1 = \frac{mc}{2}\hat{x}}$$

Após a colisão, o momento total é dado por:

$\vec{P} = \vec{p}_2 + \vec{P}_{partícula}$

$\vec{p}_2 = -\frac{h}{\lambda_2}\hat{x} = -\frac{h}{2\lambda_1}\hat{x}$

$\vec{p}_2 = -\frac{1}{2}\vec{p}_1$

Assim:

$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{P}_{partícula}$;

$\vec{p}_1 = -\frac{1}{2}\vec{p}_1 + \vec{P}_{partícula}$;

$\vec{P}_{partícula} = \vec{p}_1 + \frac{1}{2}\vec{p}_1$

$\vec{P}_{partícula} = \frac{3}{2}\vec{p}_1$

$\vec{P}_{partícula} = \frac{3}{2}\frac{mc}{2}\hat{x}$

$\vec{P}_{partícula} = \frac{3}{4}mc\,\hat{x}$

assim:

$$\boxed{P_{partícula} = \frac{3}{4}mc}$$

• Energia da partícula.

$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$

$E^2 = \left(\frac{3}{4}mc^2\right)^2 + (mc^2)^2$

$E^2 = \frac{9}{16}m^2c^4 + m^2c^4$

$E^2 = \frac{9m^2c^4 + 16m^2c^4}{16}$

$E^2 = \frac{25\,m^2c^4}{16}$

$$\boxed{E = \frac{5}{4}mc^2}$$