

# Lista de Exercícios do Capítulo 1

## Equações de Maxwell Ondas Eletromagnéticas

*Professor Carlos Zarro*

- 1) Um capacitor de placas paralelas tem placas circulares e não há um dielétrico entre elas. Cada placa tem raio igual a 2,3 cm e elas estão separadas por 1,1 mm. O fluxo de carga para a placa superior e saindo da inferior ocorre com a taxa de 5,0 A. **(a)** Determine a taxa de variação do módulo do campo elétrico na região entre as placas. **(b)** Calcule a corrente de deslocamento na região entre as placas e mostre que ela é igual a 5,0 A.
- 2) Nos capacitores referidos no problema há apenas espaço vazio entre as placas. **(a)** Mostre que um capacitor de placas paralelas tem um corrente de deslocamento que é dada por  $I_d = CdV/dt$ , onde  $C$  é a capacitância e  $V$  é a diferença de potencial entre as placas. **(b)** Um capacitor de placas paralelas de 5,0 nF esta conectado a um gerador ac ideal e a diferença de potencial entre as placas é dada por  $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ , onde  $V_0 = 300$  V e  $\omega = 500\pi$  rad/s. Determine a corrente de deslocamento na região entre as placas como função do tempo.
- 3) Um condutor no formato de um longo cilindro sólido com comprimento  $L$ , raio  $a$  e resistividade  $\rho$ , conduz uma corrente estacionária  $I$  que está uniformemente distribuída em sua seção transversal. **(a)** Use a lei de Ohm para relacionar o campo elétrico  $E$  no condutor a  $I$ ,  $\rho$  e  $a$ . **(b)** Determine o campo magnético  $\vec{B}$  no lado de fora do condutor. **(c)** Use os resultados das alíneas **(a)** e **(b)** para calcular o vetor de Poynting em  $r = a$  (a borda do condutor). Em que direção em que sentido estão  $\vec{S}$ ? **(d)** Determine o fluxo de  $\vec{S}$  através da superfície do cilindro e use o fluxo para mostrar que a densidade de energia para dentro do cilindro é  $I^2R$ , onde  $R$  é a resistência do cilindro.
- 4) Um longo solenóide de  $n$  voltas por unidade de comprimento conduz uma corrente que aumenta linearmente com o tempo. O solenóide tem raio  $R$ , comprimento  $L$  e a corrente  $I$  nas voltas é dada por  $I(t) = at$ . **(a)** Determine o campo elétrico induzido a uma distância  $r < R$  do eixo central do solenóide. **(b)** Determine a magnitude, a direção e o sentido do vetor de Poynting  $\vec{S}$  em  $r = R$  (no interior das voltas do solenóide). **(c)** Calcule o fluxo de  $\vec{S}$  por dentro do solenóide e mostre que o fluxo é igual a taxa do aumento de energia magnética no interior do solenóide.
- 5) Sabendo que a distância entre a Terra e a Lua é da 354.000 km, quanto tempo leva a luz para viajar da lua até a Terra? **(b)** A luz emitida pela estrela Sírius leva 8,61 anos para chegar a Terra. Qual a distância da Terra a Sírius em quilômetros?
- 6) Uma onda transversal propagando-se numa corda vibrante muito longa é dada pela expressão

$$y(x, t) = 6 \times 10^{-2} \text{sen}(2\pi x + 4\pi t) \text{ (SI)}.$$

- (a) Determine a amplitude da onda.
- (b) Qual é o comprimento da onda e sua frequência?
- (c) Qual a velocidade de propagação?
- (d) Qual a direção de propagação?
- (e) Determine a velocidade máxima transversal de uma partícula na corda.

7) Um *impulso* triangular de 0,5 m de altura e de 2 m de comprimento, desloca-se segunda a direção positiva do eixo  $x$  numa corda, com velocidade  $v = 12$  m/s. No instante  $t = 0$ , o impulso está entre  $x_1 = 1$  m e  $x_2 = 3$  m. Faça um gráfico da velocidade transversal do ponto  $x_3$  em função do tempo.

8) Mostre que

$$u(x, t) = u_0 \text{sen}(\omega t) \text{sen}(kx),$$

é solução da equação de ondas e que representa a sobreposição de duas ondas de igual amplitude, propagando-se em sentidos opostos ao longo do eixo  $x$ . Essa solução é uma onda estacionária, apresentando nós fixos ao longo de  $x$ , qual é a posição desses nós?

9) Uma onda eletromagnética com frequência igual a  $6,10 \times 10^{14}$  Hz se desloca no vácuo no sentido  $+z$ . O campo magnético  $\vec{B}$  é paralelo ao eixo  $Oy$  e possui amplitude de  $5,80 \times 10^{-4}$  T. Escreva as equações vetórias para  $\vec{B}(z, t)$  e  $\vec{E}(z, t)$ .

10) Uma onda eletromagnética com comprimento de onda igual a 435 nm se desloca no sentido  $-z$ . O campo elétrico é paralelo ao eixo  $Ox$  e possui amplitude de  $2,7 \times 10^{-3}$  V/m. Qual é o valor (a) da frequência, (b) da amplitude do campo magnético? (c) Escreva as equações vetoriais para  $\vec{E}(z, t)$  e  $\vec{B}(z, t)$ .

11) Uma onda eletromagnética propagando-se no vácuo possui um campo elétrico dado por  $\vec{E}(y, t) = -3,10 \times 10^5 \text{sen}(2,65 \times 10^{12}t - ky)\hat{z}$  V/m. (a) Em que direção e sentido a onda magnético está-se propagando? (b) Qual é o comprimento de onda? (c) Escreva a equação vetorial para  $\vec{B}(y, t)$ .

12) A amplitude do campo elétrico nas vizinhanças de uma certa estação de rádio é igual a  $3,85 \times 10^{-3}$  V/m. Qual é a amplitude de  $\vec{B}$ ? Como o valor obtido se compara com o campo magnético da Terra, que vale aproximadamente  $0,5 \times 10^{-4}$  T.

13) Na representação complexa da função harmônica temos que  $u = u_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$ . Mostre que: (a)  $\frac{\partial u}{\partial t} = -i\omega u$  e (b)  $\nabla u = i\vec{k} u$ .

- 14) Vamos mostrar a transversalidade da onda eletromagnética. Consideremos que os campos elétrico e magnético admitem uma representação complexa da forma  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$  e  $\vec{B} = \vec{B}_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$ . Mostramos que para meios materiais, a equação de onda satisfeita pelos campos elétrico e magnético, na ausência de cargas e correntes, é dada por

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0,$$

onde  $\vec{A} = \vec{E}$  ou  $\vec{A} = \vec{B}$ . A velocidade propagação neste meio é  $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ . **(a)** Mostre que se  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , escritos na representação complexa, satisfazem a equação de onda acima, se e somente se  $\omega = |\vec{k}|v$ . **(b)** Usando as equações de Maxwell  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  e  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , na representação complexa, mostre que  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$  e  $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ , então a direção de propagação da onda  $\vec{k}$  é normal ao plano definido por  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ .

- 15) Vamos determinar a relação entre  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  numa onda plana. Na onda plana, os campos elétricos e magnéticos podem ser representados através de variáveis complexas por  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$  e  $\vec{B} = \vec{B}_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$ . **(a)** Partindo desta representação mostre que  $\nabla \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A}$ , onde  $\vec{A}$  pode representar o campo elétrico ou o campo magnético. **(b)** Usando a representação complexa, e a Lei de Faraday,  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , mostre que

$$\vec{B} = \frac{\hat{k} \times \vec{E}}{v}.$$

**(c)** Multiplique vetorialmente o resultado da alínea anterior por  $\hat{k}$  e ambos os lados da equação para mostrar que

$$\vec{E} = v\vec{B} \times \hat{k}.$$

*Dica:* Para ajudar a obtenção da alínea anterior use a identidade vetorial  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$ .

- 16) A distância de 25,0 km da antena transmissora de uma estação de rádio, a amplitude de um campo elétrico é igual a 0,09 V/m. **(a)** Qual é a amplitude do campo magnético neste ponto? **(b)** Supondo que a antena emita ondas em todas as direções com a mesma intensidade acima do solo, qual é a potência total irradiada pela estação? **(c)** A que distância da antena a amplitude é dada por  $E_{\text{máx}} = 0,03$  V/m, um terço do valor mencionado acima.
- 17) Uma fonte de luz monocromática possui potência total igual a 60,0 W e irradia uniformemente em todas as direções uma luz de comprimento de onda igual a 700 nm. Calcule  $E_{\text{máx}}$  e  $B_{\text{máx}}$  para esta fonte a uma distância de 5,00 m da fonte.

- 18) Supondo que a intensidade da luz solar incidindo diretamente sobre um certo ponto da superfície terrestre seja igual a  $0,78 \text{ kW/m}^2$ , calcule: **(a)** a densidade de momento linear médio (momento linear por unidade de volume) da luz solar; **(b)** o momento linear médio por unidade de área e por unidade de tempo da luz solar.
- 19) Um pequeno espelho com área igual a  $5,00 \text{ cm}^2$  está em frente a uma fonte de luz monocromática situada a uma distância de  $3,20 \text{ m}$ . Sobre o espelho a amplitude do campo elétrico da luz proveniente da fonte é igual a  $0,028 \text{ V/m}$ . **(a)** Qual é a quantidade de energia incidente sobre o espelho em  $1,00 \text{ s}$ . **(b)** Qual é a pressão de radiação média exercida pela luz sobre o espelho? **(c)** Qual é a potência total irradiada pela fonte supondo que ela irradie uniformemente em todas as direções.
- 20) Uma onda eletromagnética sinusoidal plana propagando-se no ar possui comprimento de onda de  $\lambda \text{ m}$  e a amplitude do campo elétrico  $\vec{E}$  é igual  $E_0 \text{ V/m}$ . **(a)** Qual é a frequência? **(b)** Qual é a amplitude do campo magnético  $\vec{B}$ ? **(c)** Qual é a intensidade? **(d)** Qual é a força média que esta radiação exerce sobre uma superfície totalmente absorvedora perpendicular a uma direção de propagação com área igual a  $A \text{ m}^2$ ?
- 21) Um pequeno laser de He-Ne emite luz vermelha com potência de  $3,20 \text{ mW}$  concentrada num feixe com diâmetro de  $2,5 \text{ mm}$ . **(a)** Calcule as amplitudes do campo elétrico e do campo magnético da luz emitida. **(b)** Calcule as densidades de energia médias associadas ao campo elétrico e magnético. **(c)** Qual é a energia contida em um feixe de comprimento  $1,00 \text{ m}$ ?
- 22) O plano de uma superfície é perpendicular à direção de propagação de um feixe de ondas eletromagnéticas com intensidade  $I$ . A superfície absorve uma fração  $w$  da intensidade incidente, sendo  $0 \leq w \leq 1$ , e reflete a parte restante. **(a)** Mostre que a pressão de radiação sobre a superfície é dada por  $(2 - w)I/c$ . **(b)** Para uma radiação incidente de  $1,40 \text{ kW/m}^2$ , qual é a pressão de radiação quando ocorre uma absorção de  $90\%$  e quando ocorre uma reflexão de  $90\%$ ?
- 23) O combustível de um astronauta se esgotou quando ele estava se deslocando com velocidade relativa igual a zero a  $16,0 \text{ m}$  da nave espacial. O astronauta com todo seu equipamento possui massa total igual a  $150 \text{ kg}$ . Se ele usasse uma lanterna de  $120 \text{ W}$  como um foguete de luz, quando tempo ele leva para atingir sua nave espacial?