Universidade Federal do Rio de Janeiro — Instituto de Física

Física IV — 2019/1

Lista de Exercícios do Capítulo 6
Mecânica Quântica

Professor Carlos Zarro

1) Uma partícula está confinada no interior de uma região com $\Delta x = 1{,}0 \times 10^{-10}$ m. Faça uma estimativa da incerteza mínima no componente x do momento linear desta partícula.

2) A incerteza da posição de uma partícula com massa de repouso igual a m é igual a Δx. Supondo que a velocidade u da partícula seja muito menor do que a velocidade da luz, determine sua velocidade.

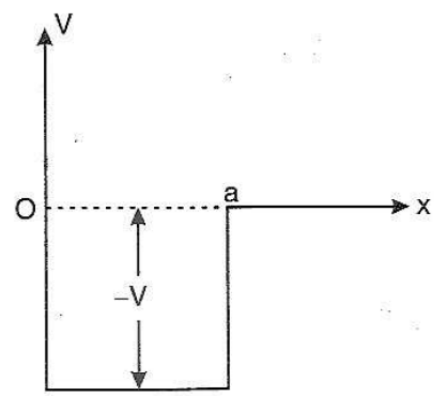
3) Considere um elétron confinado em um poço quadrado com largura igual a 0,5 nm. Supondo que o poço possua profundidade infinita, calcule a energia do estado fundamental.

4) Suponha que você possa modelar um núcleo imaginando que ele seja uma caixa com largura $b = 6{,}4 \times 10^{-15}$. Estime a energia de um nêutron ($m_n = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg) confinado ao núcleo supondo que ele esteja no nível fundamental.

5) No problema do degrau de potencial, mostre que não podem existir estados estacionários com $E < 0$. *Sugestão:* Escreva as soluções nas regiões 1 e 2 e mostre que não é possível satisfazer as condições de contorno em $x = 0$.

6) Uma partícula de massa m está confinada, em uma dimensão, por um poço de potencial retangular, limitado à esquerda por uma barreira impenetrável (conforme figura abaixo), correspondendo ao potencial

$$V(x) = \begin{cases} \infty \quad (x < 0) \\ -V \quad (0 < x < a) \\ 0 \quad (x > a) \end{cases} \qquad \text{onde } V > 0.$$



(a) Para $-V < E = -|E|$, escreva soluções estacionárias de energia E da equação de Schrödinger dentro e fora do poço de potencial.

(b) Aplicando as condições de contorno, demonstre que os autovalores da energia são raízes da equação

$$\text{tg}\left[\frac{\sqrt{2m(V-|E|)}}{\hbar}a\right] = -\sqrt{\frac{V-|E|}{|E|}}.$$

7) Um elétron está confinado dentro de uma camada delgada num semicondutor. Tratando-a como uma lâmina de espessura a entre paredes impenetráveis, estime a, sabendo que a diferença entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado é 0,05 eV.

8) Um feixe de elétrons de 2 eV incide sobre uma barreira de potencial retangular de 4 eV de altura e 10 Åde espessura. Qual é a probabilidade de transmissão? Qual seria para elétrons de 3 eV?

9) Uma partícula encontra-se confinada numa caixa com paredes impenetráveis de largura a, em uma dimensão. Para $t = 0$, ela se encontra, com certeza, na metade direita da caixa, havendo igual probabilidade dela ser encontrada em qualquer ponto desta metade. Obtenha uma função de onda inicial que descreve esta partícula.

10) Lembre que $|\psi(x)|^2dx$ é a probabilidade de encontrar uma partícula com função de onda normalizada $\psi(x)$ no intervalo entre x e $x + dx$. Considere uma partícula no interior de uma caixa de paredes rígidas em $x = 0$ e $x = L$.

(a) Mostre que a função de onda do n-ésimo estado fundamental que satisfaz a equação de Schrödinger para o problema é $\psi_n(x) \sim \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

(b) Mostre que função de onda normalizada do n-ésimo estado excitado é dada por

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

(c) Considere uma partícula no primeiro estado excitado. Para que valores de x, caso existam, no intervalo de 0 a L a probabilidade de encontrar uma partícula é igual a zero?

(d) Considere uma partícula no primeiro estado excitado. Para que valores de x a probabilidade atinge valor máximo?

11) A distância de penetração η em um poço de potencial finito é a distância em que a função de onda diminuiu a $1/e$ da função de onda no ponto clássico de inversão: $\psi(x = L+\eta) = \frac{1}{2}\psi(L)$.
(a) Mostre que a distância de penetração é

$$\eta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(U_0 - E)}},$$

onde U_0 é a profundidade do poço. **(b)** Calcule η para um elétron com uma energia cinética de 13 eV em um poço de potencial com $U_0 = 20$ eV. **(c)** Calcule η para um próton de 20 MeV em um poço de potencial com $U_0 = 30$ MeV.

12) **(a)** Mostre por substituição direta na equação de Schrödinger para o oscilador harmônico em uma dimensão que a função de onda $\psi_0(x) = A_0 e^{-\alpha^2 x^2/2}$, onde $\alpha^2 = \dfrac{m\omega}{\hbar}$, é uma solução correspondente ao nível $n = 0$. **(b)** Encontre a constante de normalização A_0. **(c)** Encontre os pontos clássicos de inversão e mostre que, em contraste, que a densidade de probabilidade apresenta um máximo em $x = 0$.

13) Uma partícula de massa m tem função de onda dada por $\psi(x) = Ae^{-|x|/a}$, onde A e a são constantes positivas. **(a)** Ache a constante de normalização A. **(b)** Calcule a probabilidade de achar a partícula na região $-a \leq x \leq a$.

14) A função distribuição de probabilidade clássica, para uma partícula confinada numa caixa unidimensional, com o eixo x na região $0 < x < L$ é dada por $P(x) = \dfrac{1}{L}$. Use esta expressão para mostrar que $\langle x \rangle = \dfrac{L}{2}$ e $\langle x^2 \rangle = \dfrac{L^2}{3}$.

15) As funções de onda para uma partícula de massa m confinada numa caixa unidimensional de comprimento L <u>centrado na origem</u> (de tal modo que os extremos da caixa estão em $x = \pm\dfrac{1}{2}$) são dadas por

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 1, 3, 5, 7, \ldots$$
$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 2, 4, 6, 8, \ldots$$

(a) Mostre que as funções de onda satisfazem as condições de contorno do problema do potencial de paredes impenetráveis. **(b)** Calcular $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$, para o estado fundamental $(n = 1)$.

Respostas

1) 5×10^{-25} Ns.

2) $\Delta u = \dfrac{\hbar}{2m\Delta x}$.

3) 1,5 eV.

4) 0,5 MeV.

7) 4,8 nm.

8) 2 eV: $2{,}04 \times 10^{-6}$. 3 eV: $1{,}07 \times 10^{-4}$.

9) $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \left(0 < x < \dfrac{a}{2}\right) \\ \sqrt{\dfrac{2}{a}} & \left(\dfrac{a}{2} < x < a\right) \end{cases}$.

10) **(c)** 0, $\dfrac{L}{2}$ e L. **(d)** $\dfrac{L}{4}$ e $\dfrac{3L}{4}$.

11) **(b)** $2{,}76 \times 10^{-4}$ m. **(c)** $1{,}05 \times 10^{-13}$ m.

12) **(b)** $A_0 = \left(\dfrac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}$. **(c)** Pontos clássicos de inversão: $A = \pm\sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega}}$.

13) **(a)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **(b)** 0,865.

15) **(b)** $\langle x \rangle = 0$. $\langle x^2 \rangle = L^2 \left[\dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{2\pi^2}\right]$.